EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

DGETI

Aprendizajes Esenciales

Geometría Analítica

Manual del Estudiante

Academia Nacional de Matemáticas

Periodo escolar
2020-2021

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la UEMSTIS de la República Mexicana y que les permita alcanzar el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia sanitaria actual que se presenta en el país por SARS COV-2, que requiere de su permanencia en casa. Asimismo, cada manual está diseñado para servir de apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas en el plan nacional educativo, a través de la construcción de sus propios conocimientos y la aplicación pertinente de éstos en su contexto personal y su vida cotidiana, desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, la interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian es en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y de diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar, inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.

Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en el manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno del semestre correspondiente de bachillerato, en los horarios asignados por las autoridades directivas de cada plantel a los titulares de la asignatura. La modalidad del curso es a distancia, es decir, utilizando las herramientas digitales que le permitan al docente comunicarse en la distancia e interactuar con sus alumnos no teniéndolos presentes físicamente, debido a la contingencia del Covid 19.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar la participación activa, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo pretende crear las condiciones que propician aprendizajes significativos desde la distancia, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarias, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes.

Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la UEMSTIS. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie de estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso-taller sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. En la medida de lo posible, que los docentes que impartan el curso posean las competencias necesarias, preparación pedagógica, dominio de los temas y estabilidad emocional, que le permitan desempeñarse en este importante puesto social.

2. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma, es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad, la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.

3. Se efectuará el registro de las calificaciones que cada alumno obtenga en los diversos contenidos, para que al final del curso sea entregada de manera informativa a los alumnos como una evidencia que legitimó su calificación final del curso.

4. El docente podrá realizar clases por video conferencias, grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc. con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.

5. Proporcionar al alumno y, si es posible, a los padres de familia (grupo de WhatsApp), los aspectos a considerar en la evaluación y su promedio parcial y final a tiempo para que tenga oportunidad de prepararse y regularizarse, de ser necesario.

6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, por ejemplo, ponerse de acuerdo en entregar tareas o evaluaciones en un punto de reunión física, por excepción y siguiendo las consideraciones de la sana distancia por la contingencia.

Competencias para desarrollar en el curso.

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC's para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.

Introducción

Las autoridades de la Secretaría de Educación Pública del país, han planeado la apertura de las clases a distancia en este período de contingencia, en todos los niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos para que los docentes puedan desarrollar su cátedra de manera digital, teniendo comunicación con sus grupos de alumnos y así poder desarrollar las estrategias pertinentes que le permitan al estudiante alcanzar, en lo mayor posible, las competencias establecidas en los planes y programas de estudio nacionales.

Este manual es el esfuerzo conjunto de la academia nacional de matemáticas de la DGETI y se plantea como una estrategia que le permita a los estudiantes de nivel medio superior adquirir las competencias necesarias, a partir de la recuperación de sus conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales esenciales para continuar con su desarrollo y formación a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático.

La construcción del conocimiento deberá ser individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

El curso tiene una duración de 13 semanas, divididas en tres bloques parciales, donde el alumno, guiado por el docente titular deberá participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas en cada asignatura, en el marco de un ambiente digital o a distancia, debido a la imposibilidad de realizarse presencialmente por el riesgo de contagios presente en esta época que nos tocó vivir.

El manual está estructurado en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al alumno construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas esenciales que le serán útiles en la adquisición de conocimientos formales posteriores y llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.
¡Somos orgullosamente DGETI!

Justificación

Estos tiempos que les tocó vivir a los estudiantes de nuestros planteles en todo el país son particularmente difíciles. Tener que enfrentarse a las circunstancias de la nueva modalidad de educación a distancia, representa para la mayoría de ellos un verdadero problema en el afán de comprender los contenidos que marcan los programas de estudio vigentes en todos los niveles. Contar con los medios de comunicación digitales adecuados en casa, aunado a las dificultades económicas que muchos de nuestros alumnos atraviesan, se ha convertido en un complicado reto para ellos y sus familias.

Conscientes de esta situación, las autoridades de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios y la Academia Nacional de Matemáticas de este subsistema, se han dado a la tarea de diseñar estrategias que favorezcan en todo lo posible la enseñanza de los temas de matemáticas, que le serán útiles para la continuación de sus estudios en este nivel bachillerato y los que el joven emprenda a continuación, en la búsqueda de su preparación y formación profesional.

Es por eso que los manuales elaborados por dicha academia están diseñados para apoyar la práctica docente y colaborar con los alumnos detonando en ellos la capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana.

Este material es el resultado de la experiencia de los maestros que lograron concentrar los contenidos de los programas de las asignaturas de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Integral y trabajar en sólo los esenciales, con el propósito de ofrecer a los alumnos las herramientas prioritarias para su formación académica en este nivel y sus estudios posteriores, evitando así el exceso de trabajo escolar en su hogar.

Índice

Bloque 1 | Sistema de Coordenadas

1.1 Sistema de coordenadas rectangulares

1.1.1 Puntos en un plano

Introducción

¿Alguna vez jugaste batalla naval? Este consiste en adivinar la posición de los barcos del contrincante, que están colocados en un plano coordenado. Las posiciones de los barcos se describen con dos coordenadas, la primera señalada con una letra y la segunda con un número.

Algo similar sucede con el sistema de coordenadas rectangulares: Si trazamos en un plano dos rectas perpendiculares entre sí, este queda dividido en cuatro regiones llamadas cuadrantes que, por convención, se numeran I, II, III y IV en sentido antihorario. La recta horizontal recibe el nombre de eje X o eje de las abscisas y la recta vertical recibe el nombre de eje Y o eje de las ordenadas, y a su punto de intersección se le conoce como origen, el cual se indica usualmente con el símbolo O (Figura 1).

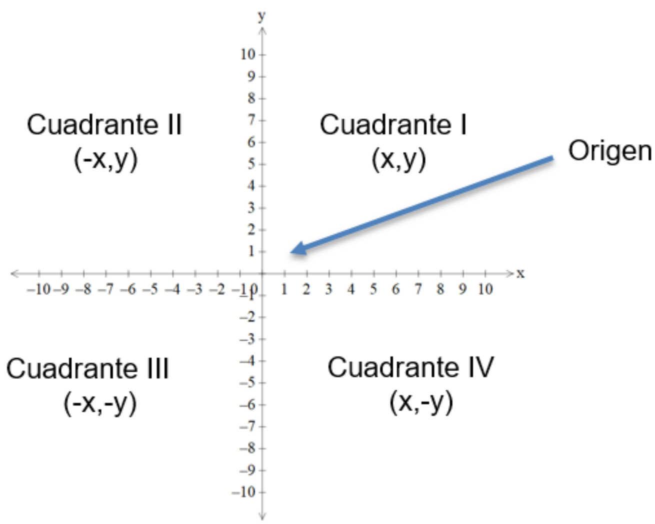


Figura 1. Sistema de Coordenadas Rectangulares

Para ubicar un punto en cualquier cuadrante se requiere conocer dos valores, uno sobre el eje x y otro sobre el eje y. Estos dos valores forman lo que se conoce como un par ordenado de valores y se representa al colocar sus elementos dentro de un paréntesis separando los elementos con una coma. Por conveniencia, las abscisas son positivas a la derecha del origen y negativas a la izquierda; las ordenadas son positivas arriba del origen y negativas abajo.

En el plano cartesiano, a un par ordenado de valores le corresponde un punto y viceversa. El punto asociado a un par ordenado se obtiene de la siguiente forma:

1) Se localiza en el eje x la abscisa del par ordenado y se traza por ese punto una recta paralela al eje y.
2) Se localiza en el eje y la ordenada del par ordenado y se traza por ese punto una recta paralela al eje x.

El punto donde se intersecan las rectas determina el punto asociado al par ordenado.

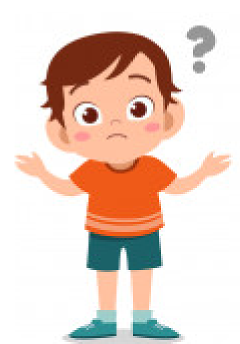
Actividades de Apertura

1. En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano:

- Traza dos rectas perpendiculares numeradas como las de la Figura 1.
- Escribe el nombre de los ejes.
- Escribe el nombre de los cuadrantes.

2. Ubica el punto $P(2,5)$

- Localiza en el eje de las abscisas el número 2, es decir, el punto en ese eje que está 2 unidades a la derecha del origen; traza una recta vertical punteada que pase por ese punto.
- Localiza en el eje de las ordenadas el número 5, es decir, el punto en ese eje que está 5 unidades arriba del origen; traza una recta horizontal punteada que pase por ese punto.
- El punto donde las rectas se cortan corresponde al punto $P(2,5)$.



Actividades de Desarrollo

1. Dibuja un plano cartesiano y ubica los siguientes puntos:

$A(-5,4)$	$D(-1,-3)$
$B(3,2)$	$E(0,-4)$
$C(-2,0)$	$F(5,-1)$

2. Identifica los cuadrantes donde se ubican los puntos anteriores y completa las siguientes frases:

El punto A pertenece al ____________ cuadrante.
El punto B pertenece al ____________ cuadrante.
El punto D pertenece al ____________ cuadrante.
El punto F pertenece al ____________ cuadrante.

Actividades de Cierre

1. Dibuja un plano cartesiano por cada conjunto de puntos, ubícalos y únelos.
   a) $A(3,-1), B(4,3)$
   b) $A(-1,2), B(4,5), C(2,-3)$
   c) $A(0,5), B(2,1), C(-3,4)$
   d) $A(1,4), B(-2,1), C(2,-3), D(4,2)$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Observa la imagen y resuelve lo que se solicita:

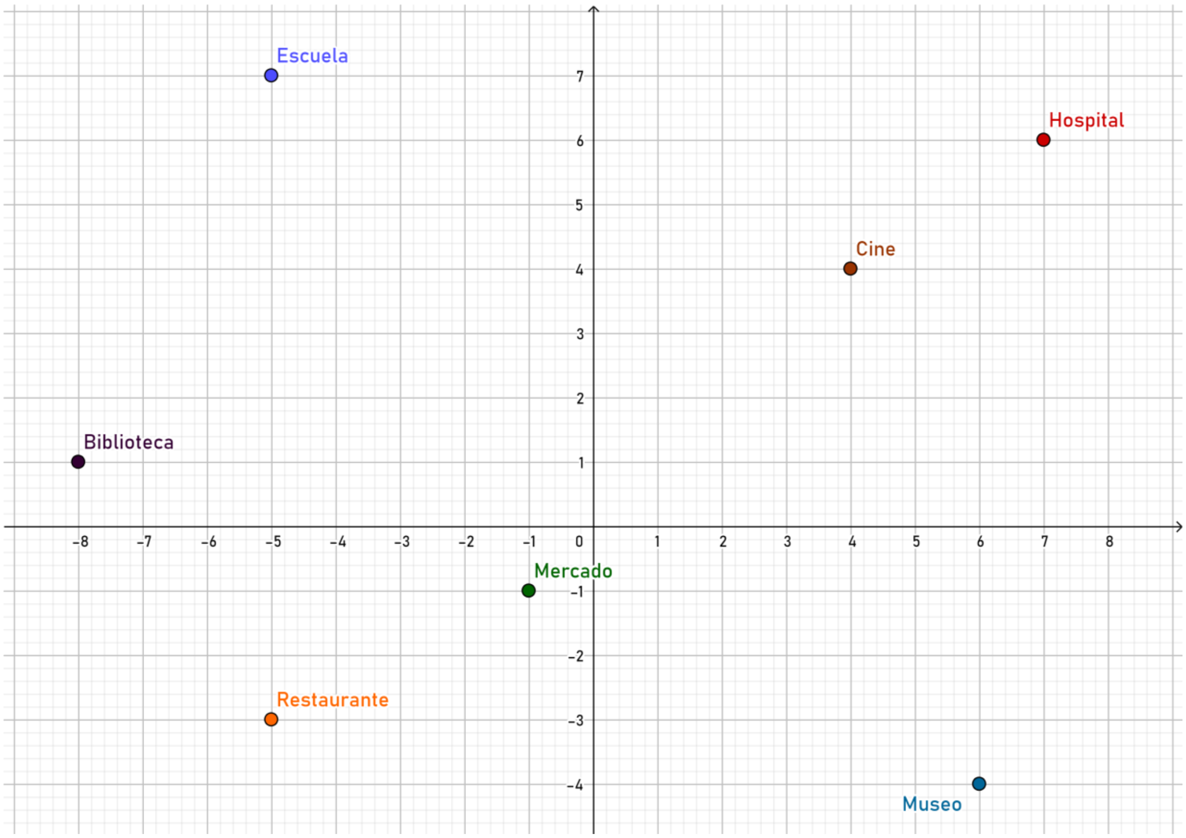


Figura 2. Puntos en la ciudad

1. Escribe las coordenadas de los puntos de la ciudad según la gráfica.

a) Hospital (,)

b) Cine (,)

c) Escuela (,)

d) Biblioteca (,)

e) Restaurante (,)

f) Mercado (,)

g) Museo (,)

Ejercicios Adicionales

Observa la siguiente imagen y resuelve:

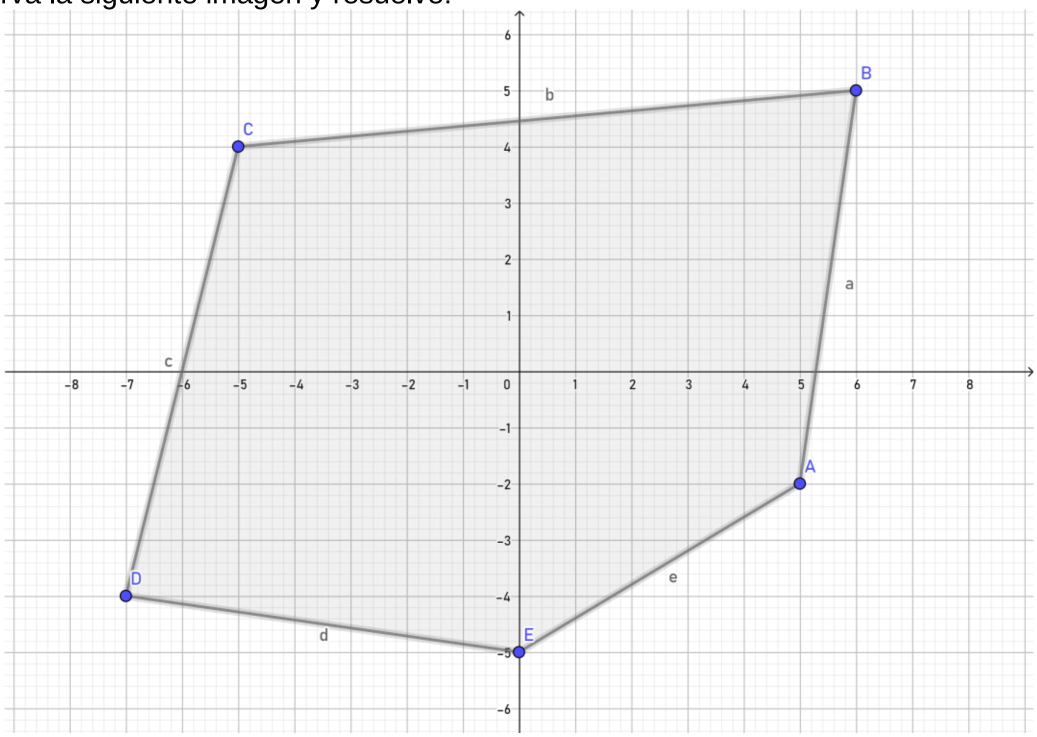


Figura 3. Polígonos en el plano

1. Encuentra las coordenadas de los vértices en el polígono.

A(,) B(,) C(,)

D(,) E(,)

2. Sin representar en el sistema coordenado rectangular los siguientes pares ordenados, determina el cuadrante en el que se ubican:

A(– 3 , 5) Cuadrante: _______________

B(8, –2) Cuadrante: _______________

A(–6, –6) Cuadrante: _______________

A(–3 , 5) Cuadrante: _______________

1.2 Distancia entre dos puntos

Introducción

¿Sabes qué es una carta de navegación? Las cartas náuticas o de navegación son mapas donde se fija la posición geográfica en que se encuentra el barco y con las cuales se puede determinar el nuevo rumbo y distancia que deberá navegar para ir a otro punto, evadiendo los peligros indicados en la misma carta.

En un plano cartesiano podemos hacer algo parecido: Podemos determinar la ubicación de un punto por sus coordenadas y hallar la distancia hasta otro punto en el mismo plano. Imagina que un barco se encuentra en el punto $(-5,6)$ y otro en el $(2,3)$. ¿Qué distancia hay entre ellos si las unidades de la carta corresponden a millas náuticas?

Para encontrar la respuesta ubicamos los puntos $(-5,6)$ y $(2,3)$ en el plano cartesiano y los unimos con una recta (Figura 1.2.1).

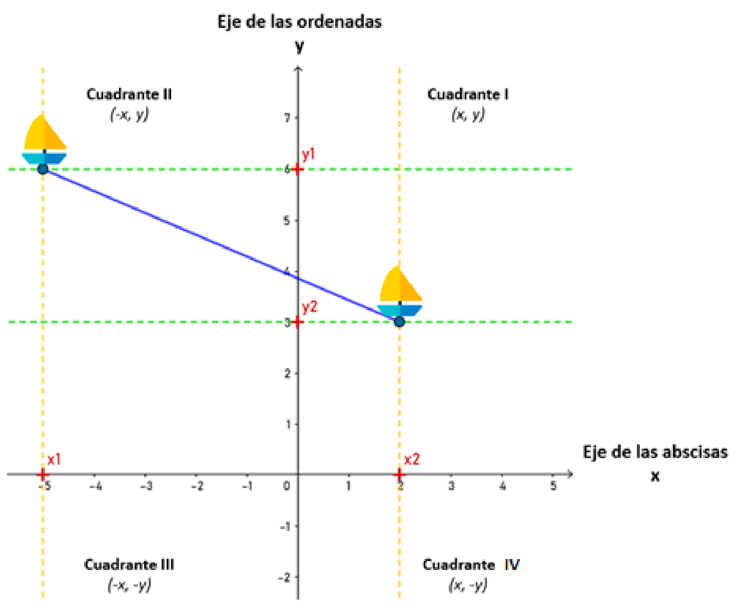


Figura 1.2.1 Puntos en el plano cartesiano

Con las rectas auxiliares que trazamos para ubicar los puntos se forma un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es el segmento que une los puntos donde se encuentran los barcos. Este hecho nos permite aprovechar el Teorema de Pitágoras para encontrar la distancia entre los barcos. Como recordarás, Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Notemos que los "catetos" corresponden a los segmentos de recta que van de x_i a x_f, y de y_i a y_f. Para conocer sus medidas, tenemos que restar

$$x_f - x_i$$

$$y_f - y_i$$

Sustituyendo esto en el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow \qquad c^2 = (x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2$$

$$c = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$$

Utilicemos los puntos de los barcos para aplicar esta fórmula:

$$(x_i, y_i) = (-5{,}6) \qquad x_i = -5, \qquad y_i = 6$$

$$(x_f, y_f) = B(2,3) \qquad x_f = 2, \qquad y_f = 3$$

$$c = \sqrt{\left(2 - (-5)\right)^2 + (3 - 6)^2}$$

$$c = \sqrt{(2 + 5)^2 + (-3)^2}$$

$$c = \sqrt{(7)^2 + (-3)^2}$$

$$c = \sqrt{49 + 9}$$

$$c = \sqrt{58} \approx 7.615$$

Por lo tanto, los dos barcos se encuentran a una distancia aproximada de 7.6 millas náuticas.

La manera en la que usamos el Teorema de Pitágoras nos lleva a la fórmula general para calcular la distancia entre dos puntos.

La ***distancia*** *(d) $\overline{AB}$* ***entre dos puntos*** *cualesquiera $A(x_i, y_i)$ y $B(x_f, y_f)$ está dada por la fórmula:*

$$d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$$

También es válido invertir el orden de los puntos de las coordenadas (x, y)

$$d = \sqrt{(x_i - x_f)^2 + (y_i - y_f)^2}$$

Actividades de Apertura

En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano indicando los nombres de los ejes y los cuadrantes y realiza lo siguiente:

1. Ubica en el plano cartesiano los barcos que se encuentra en los puntos $A(6,3)$ y $B(3,-1)$

2. Identifica los valores de x y y de cada punto.

$$A(x_i, y_i) = A(\_,\_) \qquad x_i = \_\_, \qquad y_i = \_\_$$

$$B(x_f, y_f) = B(\_,\_) \qquad x_f = \_\_, \qquad y_f = \_\_$$

3. Calcula cuántas millas náuticas hay entre los dos barcos con la fórmula

$$d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$$

Actividades de Desarrollo

Imagina que en el plano del problema anterior el puerto se encuentra en el origen $O(0,0)$.

a) Calcula la distancia de cada barco hasta el puerto.

$\boldsymbol{Barco\ A}$: _______________ $\boldsymbol{Barco\ B}$: _______________

b) Si el barco A se hunde, ¿Quiénes están más cerca para ayudar a los sobrevivientes? ¿Las personas del puerto o las del barco B? ______________________

Actividades de Cierre

Localiza los siguientes pares de puntos en el plano cartesiano, únelos con una línea y encuentra la distancia entre ellos:

a) $A(-2,7), B(6,-1)$ b) $A(-3,5), B(5,0)$ c) $A(0,2), B(7,3)$

d) $A(2,6), B(5,8)$ e) $A(7,3), B(3,-1)$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Observa la siguiente imagen del plano de una ciudad y calcula las distancias existentes entre los lugares que se solicitan en los incisos. Anota tus respuestas en cada línea:

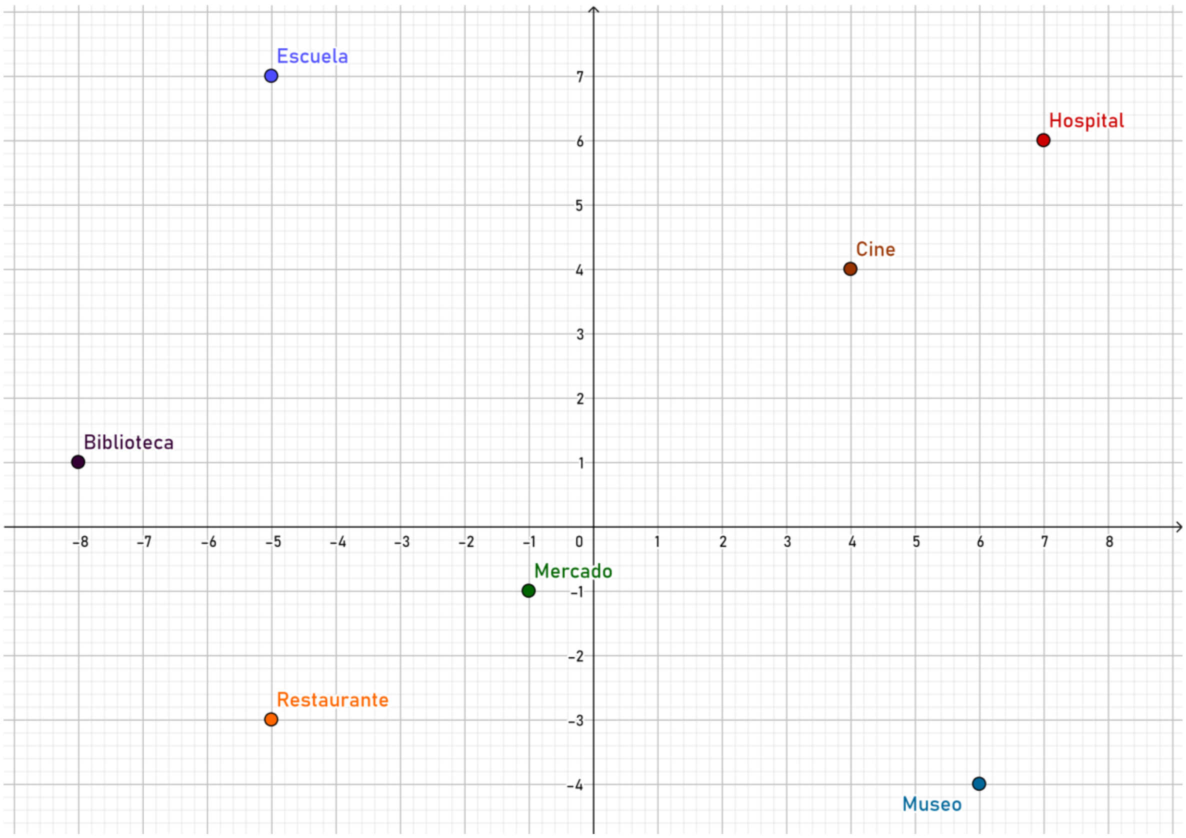


Figura 1.2.1. Puntos de la ciudad

a) La escuela y la biblioteca: ______________________

b) La biblioteca y el museo: ______________________

c) El mercado al hospital: ______________________

d) La escuela y el cine: ______________________

e) El cine y el restaurante: ______________________

Ejercicios Adicionales

Observa la imagen y resuelve lo siguiente.

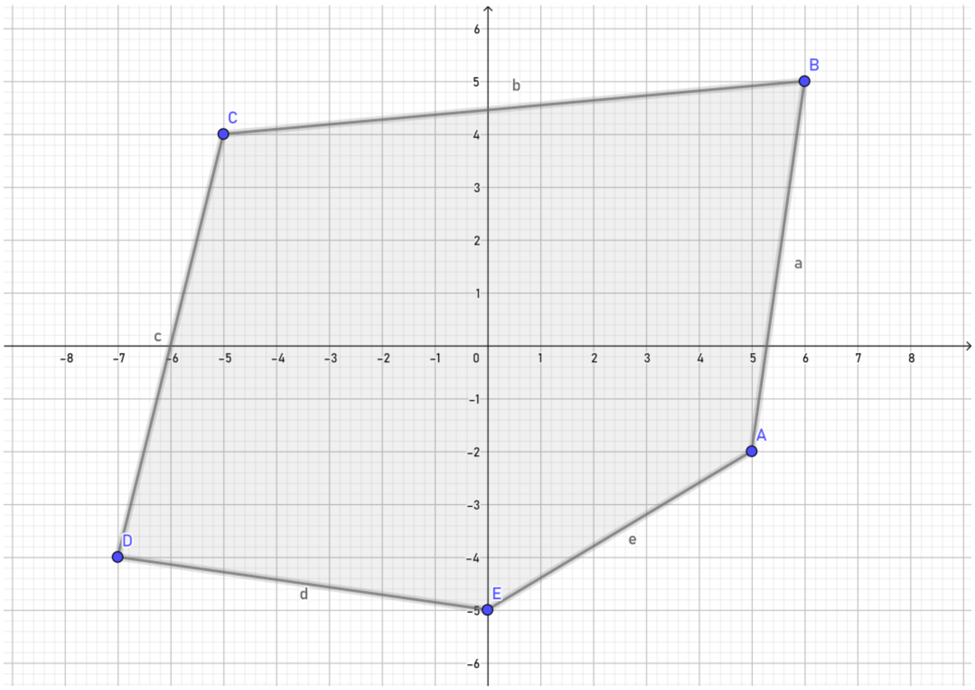


Figura 1.2.4 Polígonos en el plano

Encuentra la medida de cada lado del polígono:

a: ______________________________

b: ______________________________

c: ______________________________

d: ______________________________

e: ______________________________

¿Cuál es el perímetro del polígono? _________________________

1.3 División de un segmento en una razón dada

1.3.1 Determinación de las fórmulas para obtener las coordenadas de un punto de división de una razón dada

Introducción

¿Recuerdas la fábula de la liebre y la tortuga? Esta narra la historia de una tortuga y una liebre que compiten en una carrera; la liebre inicia a toda velocidad y corre enérgicamente durante un tiempo, pero se detiene a descansar al ver que le lleva mucha ventaja a la tortuga. Después de un rato se queda dormida y la tortuga, que andaba con paso lento, la alcanza, la rebasa y llega en primer lugar.

Imagina que la Figura 1.3.1 representa la carrera entre la tortuga y la liebre. El punto $(6,4)$ es donde la liebre se detiene a descansar. ¿Cuál es la razón entre la longitud del recorrido total y la longitud que recorrió la liebre?

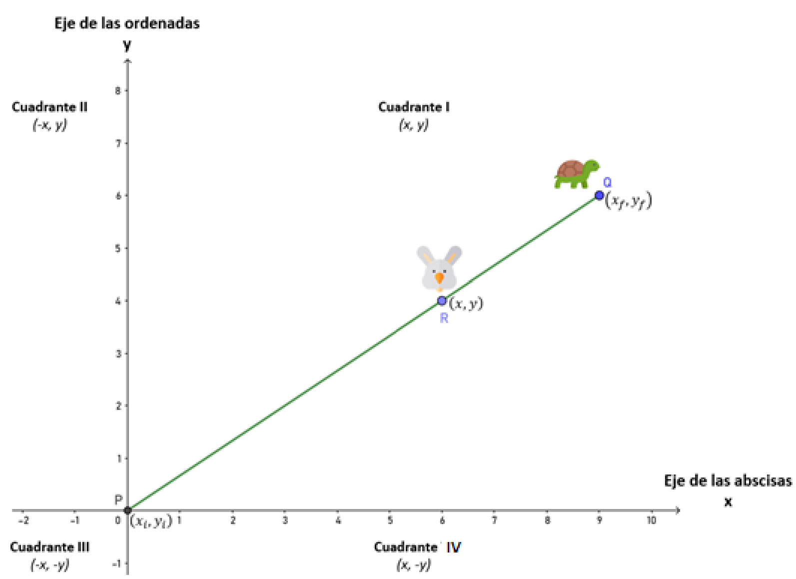


Figura 1.3. 1 División de un segmento

Para encontrar la respuesta consideremos la razón buscada como el cociente del segmento que recorrió la liebre (PR) y el segmento que le faltó recorrer (RQ).

$$r = \frac{PR}{PQ}$$

Entonces decimos que R divide el segmento PQ en la razón algebraica r.

Para determinar la razón dados los extremos y el punto de división se emplea:

$$r = \frac{x-x_i}{x_f-x} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{y-y_i}{y_f-y}$$

Para encontrar el punto de división dados los extremos y la razón se utiliza:

$$x = \frac{x_i+rx_f}{1+r}; \qquad y = \frac{y_i+ry_f}{1+r}$$

En nuestro problema conocemos los extremos del segmento y el punto de división y para aplicar la fórmula tenemos que identificar las coordenadas de los puntos en el plano:

$$P(x_1, y_i) = P(0,0) \qquad x_i = 0 \qquad y_i = 0$$

$$Q(x_f, y_f) = Q(9,6) \qquad x_f = 9 \qquad y_f = 6$$

$$R(x, y) = R(6,4) \qquad x = 6 \qquad y = 4$$

Sustituimos estos números en la fórmula:

$$r = \frac{x - x_i}{x_f - x} = \frac{6-0}{9-6} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2$$

En la fórmula de las ordenadas obtenemos el mismo resultado:

$$r = \frac{y - y_i}{y_f - y} = \frac{4-0}{6-4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, los segmentos PR y RP están en la razón 2:1 (Se lee 2 a 1). El signo de la razón indica si el punto de división se ubica entre los extremos del segmento o fuera de ellos sobre la misma recta:

Cuando el punto está *en el segmento*, la razón es positiva $(r > 0)$.

Cuando el punto está *en la prolongación del segmento*, la razón es negativa $(r < 0)$.

Actividades de Apertura

1. En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano indicando los nombres de los ejes y los cuadrantes y realiza lo siguiente:

a) Ubica en el plano cartesiano los puntos $P(-1,1)$ y $Q(6,15)$. Traza una recta que pase por ambos puntos.

b) En la recta que trazaste ubica el punto $R(2,7)$.

c) ¿Cuál es la razón en la que el punto R divide al segmento PQ? Utiliza la fórmula $r = \frac{x-x_i}{x_f-x}$

d) Ahora aplica la fórmula $r = \frac{y-y_i}{y_f-y}$ y compara los resultados.

2. Determina las coordenadas del punto R que divide el segmento PQ, con extremos $P(-4,1)$ y $Q(8,5)$, en la razón 3:5, es decir $\frac{PR}{RQ} = \frac{3}{5}$.

a) Identifica el valor de las variables a usar en la fórmula de acuerdo con los puntos de los extremos.

$P(x_1, y_i) = P(-4,1)$	$x_i =$______	$y_i =$______
$Q(x_f, y_f) = Q(8,5)$	$x_f =$______	$y_f =$______

b) Encuentra la abscisa del punto que divide el segmento con la fórmula $x = \frac{x_i+rx_f}{1+r}$.

c) Encuentra la ordenada del punto que divide el segmento con la fórmula $y = \frac{y_i+ry_f}{1+r}$.

d) ¿Cuáles son las coordenadas del punto R?

Actividades de Desarrollo

El ancho de la franja que separa una ciclopista de una autopista es la mitad de un carril de ésta. Las coordenadas de los puntos están dadas en metros.

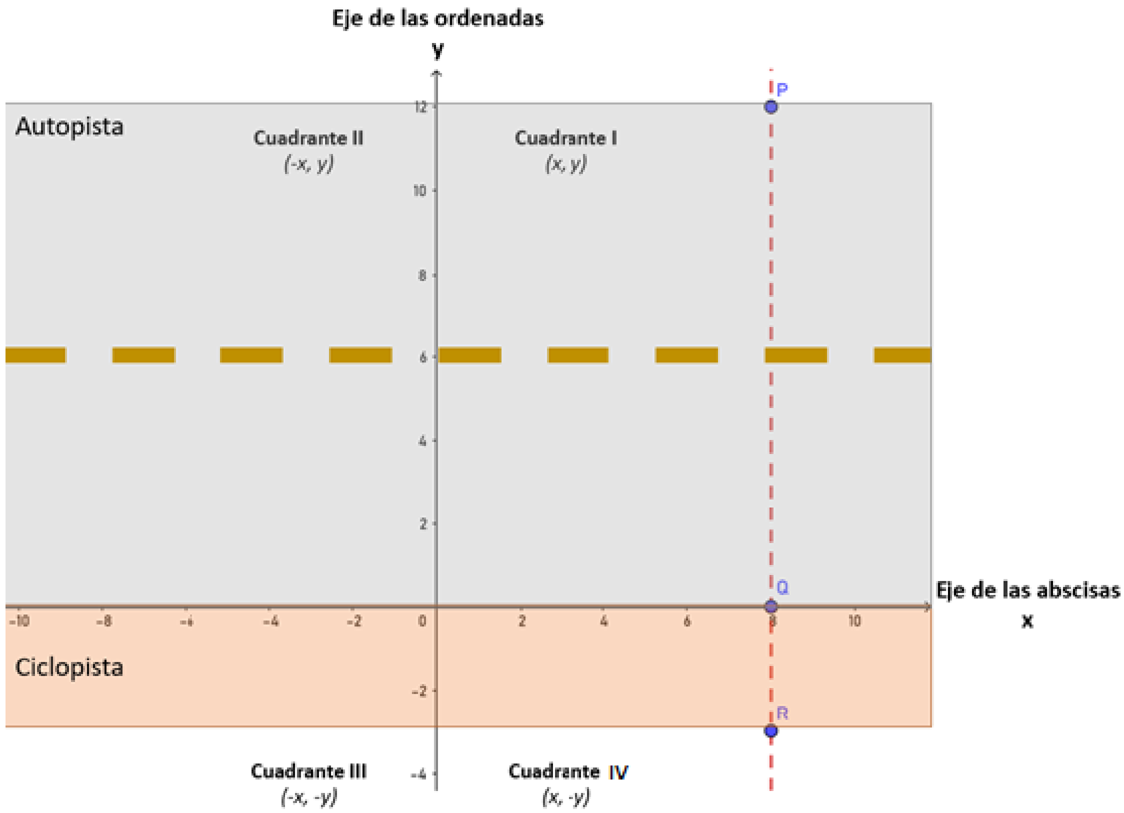


Figura 1.3. 2. Ciclopista

a) ¿Cuáles son las coordenadas del ciclista en R?

b) ¿Cuál es el ancho de la franja de separación?

Actividades de Cierre

1. Determina la razón *r* en la que el punto R divide al segmento de recta de extremos P y Q.

   a) $P(0{,}2), Q(-2{,}4), R(2{,}0)$
   b) $P(-1{,}4), Q(0{,}3), R(3{,}0)$
   c) $P(3,-4), Q(0{,}2), R(2,-2)$

2. Dados los extremos P, Q y la razón *r*, encuentra las coordenadas del punto de división R del segmento PQ.

   a) $P(4{,}1), Q(5,-2), r=-2$
   b) $P(0{,}5), Q(6,-1), r=5$
   c) $P(-2,3), Q(4,5), r=\frac{2}{3}$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Resuelve lo siguiente:

1. El último mensaje emitido por un avión de reconocimiento con quien se perdió todo contacto indicaba que se hallaba a 250 km del punto de partida y a 350 km del punto donde debía llegar. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio desde donde envió su señal, si el avión se desplaza en línea recta y los lugares de partida y llegada se ubican en $A(-2{,}4)$ y $B(8{,}5)$.
2. La quena es una flauta utilizada por las culturas nativas de Perú, Bolivia y partes de Chile y Argentina. Se construye con una caña con 5 o 6 agujeros y emite un sonido dulce y melancólico. Si las coordenadas de los extremos de la flauta son $A(2{,}6)$ y $B(7{,}0)$, y la del primer agujero son $C(4,3.6)$, ¿cuál es la razón en que divide este agujero al instrumento?

Ejercicios Adicionales

1. Encuentra los puntos que dividen el segmento con extremos $A(-2,-5)$ y $B(2,11)$ en cuatro partes iguales.

2. Las longitudes del brazo y del cuerpo de una guitarra eléctrica son, respectivamente 64 cm y 32 cm. Los extremos del cuerpo de la guitarra son $A(4,5)$ y $B(4,20)$. ¿Cuáles son las coordenadas del extremo final del extremo de la guitarra?

1.4 Punto medio

1.4.1 Determinación de las fórmulas para obtener las coordenadas del punto medio de un segmento

Introducción

¿Has jugado basquetbol alguna vez? Es muy probable que sí, o al menos habrás estado o visto una cancha donde se practica este deporte. Estas canchas tienen varias líneas dibujadas en el suelo; una de ellas es la línea central, llamada así porque divide la cancha justo por la mitad.

En la Figura 1.3.1 podemos observar un diagrama de una cancha de basquetbol en un plano cartesiano. Sobre un lado de la cancha pasa la recta con extremos $A(x_i, y_i)$ y $B(x_f, y_f)$; el punto medio $P_m = (x_m, y_m)$ de este segmento de recta la divide en dos segmentos iguales

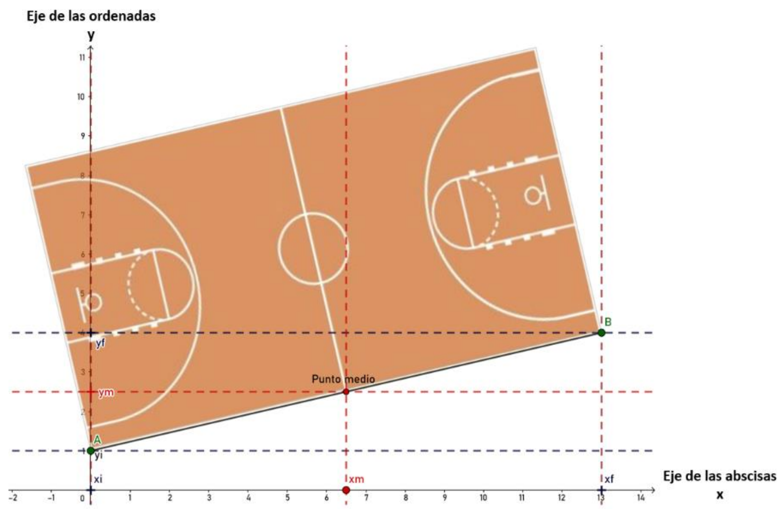


Figura 1.3. 3 Punto medio

Si el punto P_m divide a AB en dos segmentos de recta iguales, entonces $AP_m = P_m B$.

$$r = \frac{AP_m}{P_m B} = \frac{P_m B}{P_m B} = 1$$

Por tanto, las coordenadas del punto medio son:

$$P_m\left(\frac{x_i + x_f}{2}, \frac{y_i + y_f}{2}\right)$$

En la Figura 1.3.1 podemos identificar las coordenadas de los puntos A y B:

$$A(0,1) \qquad x_i = 0 \qquad y_i = 1$$

$$B(13,4) \qquad x_i = 13 y_i = 4$$

Utilizando estos datos en la fórmula encontramos las coordenadas del punto medio:

$$P_m\left(\frac{x_i + x_f}{2}, \frac{y_i + y_f}{2}\right) = P_m\left(\frac{0 + 13}{2}, \frac{1 + 4}{2}\right) = P_m\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right) = P_m(6.5, 2.5)$$

Actividades de Apertura

1. En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano indicando los nombres de los ejes y los cuadrantes y realiza lo siguiente:

- Ubica en el plano cartesiano los puntos $A(-6,8)$ y $B(6,-7)$. Traza una recta que pase por ambos puntos.

- Encuentra las coordenadas del punto medio con las fórmulas

$$x_m = \frac{x_i + x_f}{2} \quad \text{y} \quad y_m = \frac{y_i + y_f}{2}$$

2. Uno de los extremos de un segmento de recta es el punto $A(3,2)$ y su punto medio es el punto $P_m(-\ 3,5)$. Encuentra las coordenadas del otro extremo.

- Identifica el valor de las variables a usar en la fórmula de acuerdo a los puntos conocidos.

$A(x_1, y_i) = A(3,2)$	$x_i =$___	$y_i =$___
$P_m(x, y) = P(-3{,}5)$	$x_f =$___	$y_f =$___

- Sustituye estos valores en la fórmula $x = \frac{x_i + x_f}{2}$ para encontrar x_f. $\boldsymbol{x_f} =$___
- Sustituye estos valores en la fórmula $y = \frac{y_i + y_f}{2}$ para encontrar y_f. $\boldsymbol{y_f} =$___
- ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo?

Actividades de Desarrollo

Dibuja dos planos cartesianos y ubica los puntos de los siguientes problemas para encontrar la respuesta.

1. Dos jugadores de basquetbol se encuentran en los puntos $A(1{,}7)$ y $B(8,9)$. El jugador A le hará un pase al jugador B. El jugador C, del equipo contrario, se coloca entre ellos para intentar interceptar el pase. Considerando que el jugador C se encuentra a la misma distancia del jugador A que del jugador B, ¿cuáles son las coordenadas del jugador C?

2. En una competencia de relevos, el corredor 1 inicia en el punto $A(-2{,}4)$ hasta llegar al punto $B(2.5, 3.5)$ donde lo espera su relevo, el corredor 2. Si cada uno recorre la mitad del camino, ¿cuáles son las coordenadas donde termina el corredor 2?

Actividades de Cierre

1. Calcula las coordenadas del punto medio entre los puntos dados. Grafícalos

a) $A(-2,6), B(5,8)$

b) $C(3,1), D(9,1)$

c) $E(-1,8), F(7,3)$

2. Dados un extremo del segmento y el punto medio, calcula las coordenadas del otro extremo del segmento.

a) $G(3,4),\ M\left(\frac{11}{2},0\right)$

b) $H(-7,5), M(0,4)$

c) $I\left(-6,\frac{1}{3}\right), M(1,2)$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1. Resuelve lo siguiente:

   Un barco está ubicado en el océano en el punto de coordenadas $A\,(-8{,}10)$ y el puerto está situado sobre el punto de coordenadas $B(6,-5)$. Encuentra el punto medio del segmento que los une.

2. En una campaña de reforestación se planta un árbol en el punto $A(5,-3)$ y otro árbol en el punto $B(-7{,}9)$. Justo en medio de estos dos árboles, se instala un sistema de riego automático. ¿Cuáles son las coordenadas del dispositivo de riego?

Ejercicios Adicionales

Los vértices de un cuadrilátero son A(-4,3), B(3,1), C(6,4) y D(-1,6). Dibújala en un plano cartesiano y encuentra el punto de intersección de sus diagonales.

1.5 Perímetros y áreas

1.5.1 Determinación de las fórmulas para obtener las coordenadas del punto medio de un segmento

Introducción

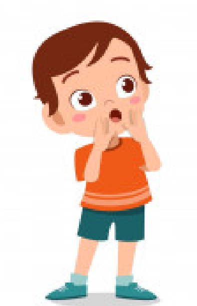
Con frecuencia nos encontramos en situaciones en las que necesitamos conocer el área y perímetro de una superficie. Por ejemplo, cuando vamos a pintar una pared, construir en un terreno, enmarcar una fotografía, etc. El perímetro es la distancia alrededor del exterior de una figura, mientras que el área es el espacio que queda encerrado entre los límites de esa figura.

Para determinar el perímetro de una forma geométrica sumamos la longitud de todos sus lados. Cuando la figura se encuentra en el plano cartesiano podemos calcular la medida de sus lados por la distancia de sus vértices con la fórmula $d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2}$ para después sumar la medida de todos sus lados.

Conociendo las coordenadas de los vértices de las figuras en el plano, podemos también calcular el área analíticamente con la siguiente fórmula.

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Esta fórmula implica el dominio de determinantes. Y para escribir la determinante, se escoge un punto del polígono, y se recorren, en sentido contrario a las manecillas del reloj, todos los puntos que conformen al polígono, hasta volver a anotar las coordenadas del punto que escogimos.



Por ejemplo, supongamos que el polígono de la Figura 1.5.1 representa un campo de cultivo con medidas en metros, del que necesitamos conocer su perímetro para colocar una cerca y su área para estimar cuántas plantas se podrán sembrar en él si cada planta necesita $1\,m^2$ para desarrollarse bien.

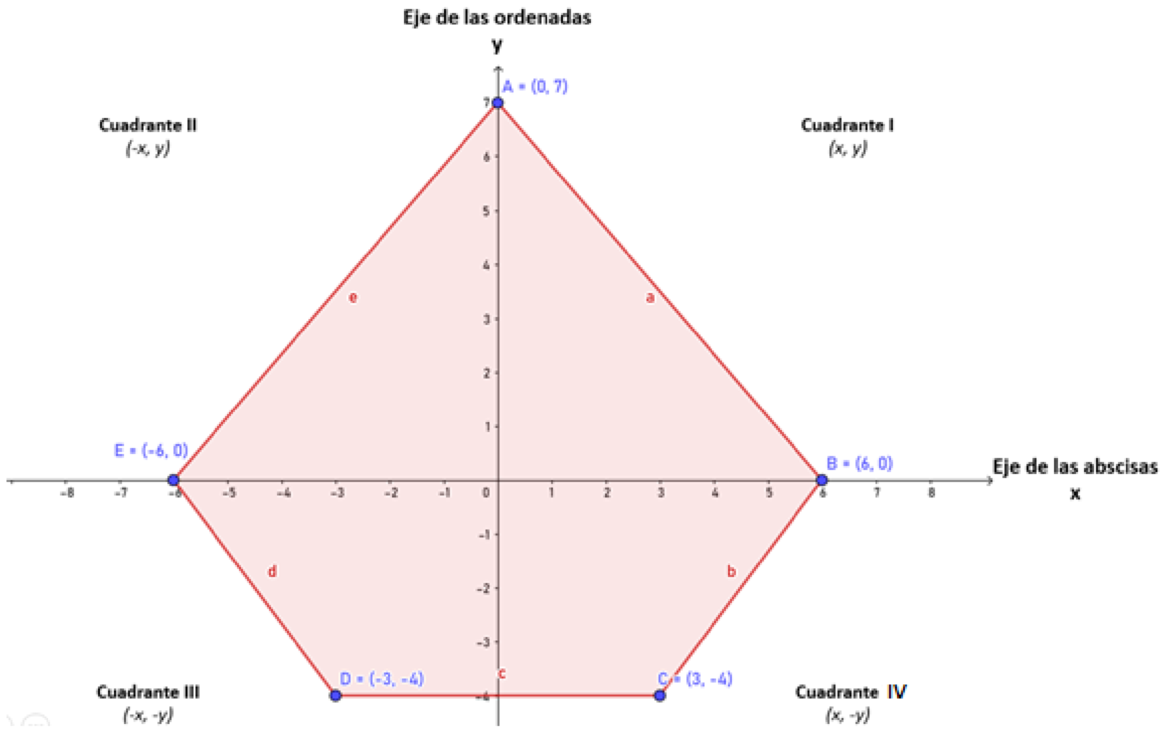


Figura 1.5. 1 Perímetro y área

Comenzamos calculando la medida de los lados del terreno con la fórmula de la distancia. El lado a une los vértices A y B; usamos sus coordenadas para aplicar la fórmula de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2} \Rightarrow d_a = \sqrt{(6-0)^2 + (0-7)^2}$$

$$= \sqrt{(6)^2 + (-7)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 49^2}$$

$$= \sqrt{85} \approx 9.22$$

Del mismo modo, calculamos las medidas de los lados restantes y luego sumamos todo:

Lado a	9.22 m
Lado b	5 m
Lado c	6 m
Lado d	5 m
Lado e	9.22 m
Perímetro:	**34.44 m**

Para encontrar su área reemplazamos las variables con los puntos del pentágono recorriéndolos de A hacia E, obtenemos lo siguiente:

$$Área = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \Rightarrow Área = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -4 \\ -6, & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Para calcular el determinante multiplicamos las diagonales descendentes y les restamos el producto de las diagonales ascendentes como se muestra a continuación:

$$\det\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -4 \\ -6 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & 0 \\ 3 & -4 \\ -3 & -4 \\ -6 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= |\ [(0*0)+(6*-4)+(3*-4)+(-3*0)+(-6*7)]$$

$$-[(6*7)+(3*0)+(-3*-4)+(-6*-4)+(0*0)]\ |$$

$$= |[0-24-12+0-42]-[42+0+12+24+0]|$$

$$= |[-78]-[78]|$$

$$= |-156|$$

Por último, dividimos entre dos el valor del determinante para encontrar el área del terreno:

$$Área = \frac{1}{2}|-156| = 78$$

Entonces, el terreno tiene una superficie de 78 m^2, por lo que podemos sembrar 78 plantas en él.

Actividades de Apertura

En tu cuaderno dibuja un plano cartesiano indicando los nombres de los ejes y los cuadrantes y realiza lo siguiente:

- Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos, que representan las esquinas de una alberca: $A(-2,5)$, $B(4,2)$, $C(2,-6)$ y $D(-4,-3)$.
- Une los puntos AB, BC, CD y AD. Calcula la distancia entre ellos y suma las medidas de cada lado para hallar el perímetro:

Lado a

Lado b

Lado c

Lado d

Perímetro:

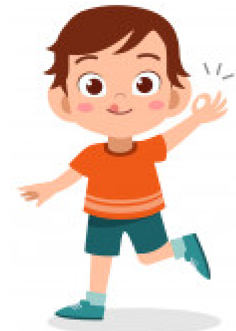
- Encuentra el área del fondo de la alberca con la fórmula $\acute{A}rea = \frac{1}{2}\det\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

Actividades de Desarrollo

En una fábrica de espejos desean saber cuánto material necesitan para hacer un espejo decorativo con forma hexagonal, de modo que deben calcular su perímetro y área. Los vértices del espejo son los puntos $A(2,0), B(5,2), C(5,5), D(2,7), E(-1,5)$ y $F(-1,2)$. Considera que la unidad de medida son centímetros.

a) ¿Cuál es perímetro del espejo?

b) ¿Cuál es su área?



Actividades de Cierre

1. Calcula el área y perímetro de los triángulos con los siguientes vértices:
   a) $(2,7),(6,10),(12,1)$
   b) $(-4,0),(0,6),(4,-4)$

2. Calcula el área y perímetro del paralelogramo cuyos vértices son $A(-1,-1), B(4,-1), C(5,2)$ y $D(0,2)$.

3. Calcula el área del polígono con vértices $(4,4),(-3,2),(3,-2),(-5,3)$ ordenando los vértices:
   a. Según el sentido de las manecillas del reloj.
   b. En sentido contrario a las manecillas del reloj.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Resuelve lo siguiente:

1. Los puntos que delimitan el campo de béisbol que se muestra en la imagen de abajo, tienen las coordenadas siguientes:

$A(0,0)$ $B(0,100)$ $C(20,100)$ $D(75,75)$ $E(100,20)$ $(100,0)$

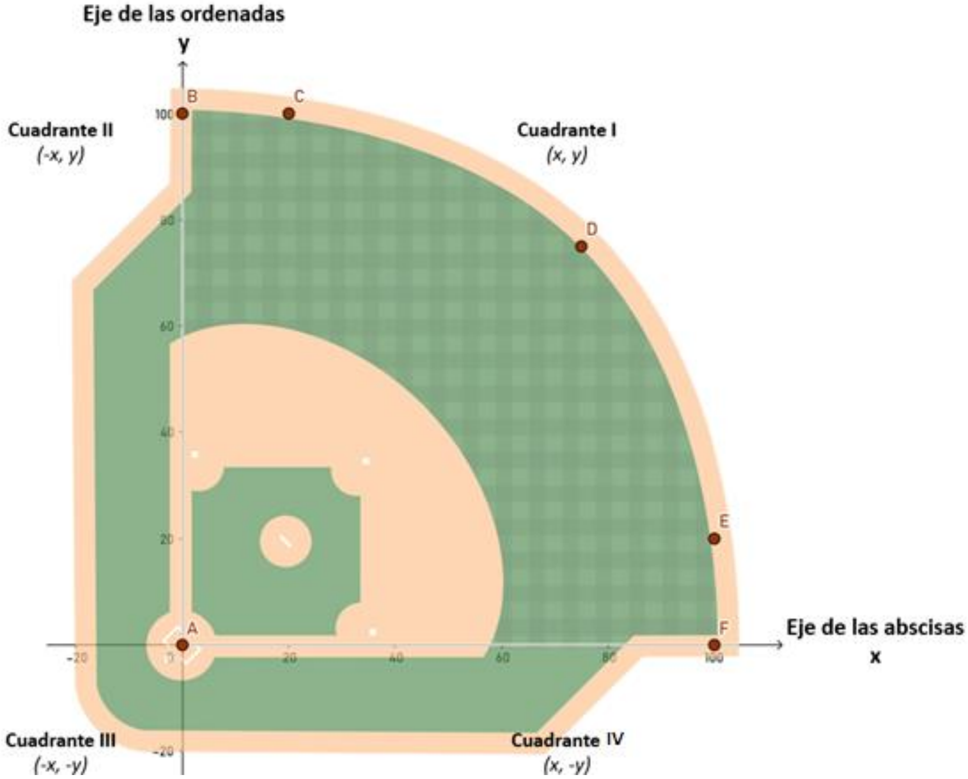


Figura 1.5. 2. Campo de béisbol

Aproxima mediante el área y perímetro del hexágono ABCDEF el área y perímetro del campo de béisbol. Considera que la unidad de medida son metros.

2. Un ingeniero topógrafo realiza un levantamiento de linderos en un terreno donde se proyecta construir un centro comercial. Los datos recogidos en la tabla de referencia del plano incluyen las coordenadas de los vértices de la poligonal. ¿Cuál es, en metros cuadrados, la superficie del terreno donde se construirá dicho centro?

X	Y	Vértice
100	70	G
50	200	H
-80	40	I
0	0	J

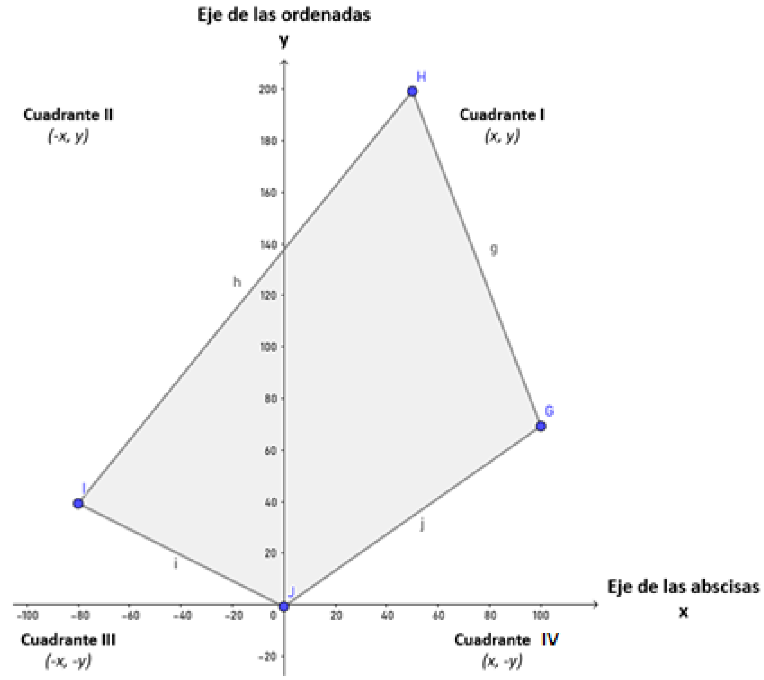


Figura 1.5. 3. Centro comercial

Ejercicios Adicionales

Determina el perímetro y área de un pentágono cuyos vértices son los puntos $A(-1,2), B(3,4), C(4,6), D(2,-1)$ y $E(0,-3)$. Dibújalo en el plano cartesiano.

Bloque 2 | La recta

2.1 Pendiente y ángulo de inclinación

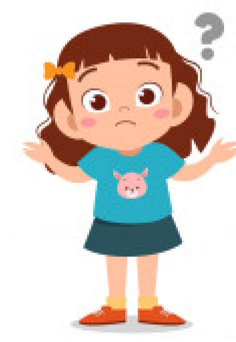
Introducción

La recta ubicada en el plano cartesiano en cualquiera de los cuatro cuadrantes representa diferentes comportamientos según el ángulo relacionado con la recta y el eje de las abscisas que forman su desplazamiento en sentido contrario a las manecillas del reloj. Tomando como consideración la ubicación y forma de una recta, estas se representan en cuatro formas, positiva, negativa, nula o infinita, con respecto a la tangente que representa a la recta y su ángulo de inclinación formado por la recta y eje de las abscisas. ¿Cómo podemos determinar los puntos en una recta? ¿Para qué nos sirve localizarlos? ¿Al trazar la recta de las ecuaciones **y = 2x – 1** e **y = -2x + 1** tiene el mismo sentido? ¿Qué determina que una función sea creciente o decreciente?

Es de suma importancia mencionar que para determinar la pendiente de una recta es localizando dos puntos cuales quiera de la recta y aplicando la formula correspondiente o por medio de la tangente del ángulo que la forma, así como también se localiza la pendiente de una recta si se cuenta o se determina de manera analítica la ecuación general de la recta. En la vida cotidiana la pendiente es de suma importancia, debido a que la interpretamos en señales de tránsito en las carreteras para disminuir o aumentar la velocidad otra aplicación importante es en las construcciones e ingeniería para determinar la caída de líquidos de manera adecuada sin que se queden estancados por no contar con una pendiente adecuada.

Actividades de Apertura

Para lograr el desarrollo del tema de la recta en Geometría Analítica, es necesario el repaso y la comprensión de temas relacionados con álgebra, como son expresiones algebraicas, término algebraico y elementos de un término algebraico, grado de un término, términos semejantes, de conceptos de geometría y trigonometría como son punto, línea, recta, segmento, plano, ángulo, tangente y los temas de plano cartesiano y localización de puntos en el plano cartesiano, gráfica y tabla de funciones, para determinar el crecimiento o decrecimiento.



Selecciona F ó V según consideres **Falsa** o **Verdadera** la aseveración en cada enunciado.

1.- El punto es algo que carece de dimensión y sirve para indicar una posición. F V

2.- La línea es una serie consecutiva de puntos que cambia de dirección. F V

3.- La recta es una sucesión ininterrumpida de puntos con una misma dirección. F V

4.- Dos puntos determinan una recta, la recta es infinita, no posee principio ni fin. F V

5.- Una semirrecta es una línea que tiene origen, pero no fin y se puede medir. F V

6.- La recta tiene una dimensión, la longitud. F V

7.- Un segmento, es una línea recta que tiene principio y fin, se puede medir. F V

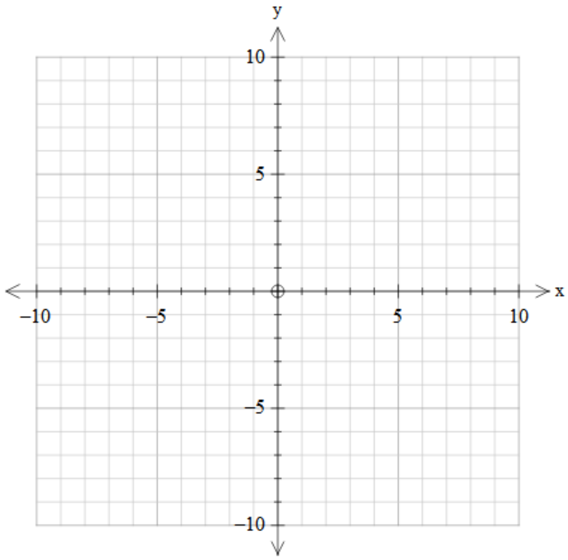
8.- El plano es la superficie donde no se pueden trazar puntos y rectas. F V

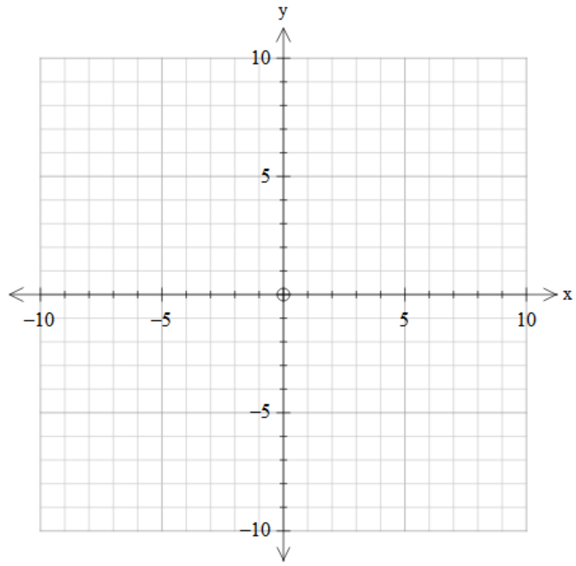
9.- Dos rectas son perpendiculares, cuando al cortarse forman 4 ángulos rectos. F V

10.- En la tangente el ángulo de 0° no tiene el mismo valor que el ángulo de 180°. F V

Recuperación de conocimientos.

Grafica las funciones **$y = 2x - 1$** e **$y = -2x + 1$,** representa la tabla y su gráfica, en los planos





Actividades de Desarrollo

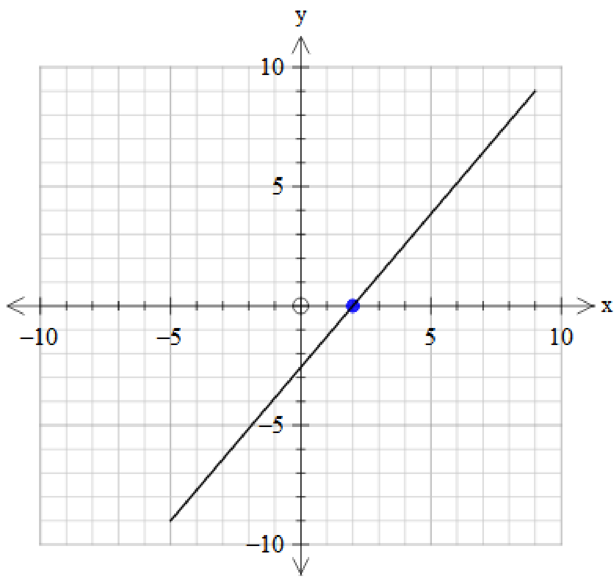
2.1.1 Pendientes positivas, negativas y nulas

Para iniciar el tema podemos observar en nuestro entorno, en casa tenemos algunos ejemplos reales de rectas con inclinación como son tuberías de agua de los mini Split, rampas para discapacitados, láminas de techado de casa, los escalones de la casa, la resbaladilla de un parque, etc.

Menciona 5 ejemplos de tu entorno:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________
4. ____________________________
5. ____________________________

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que se forma con la recta y el eje de las abscisas, en sentido contrario a las manecillas del reloj. Por lo tanto, el ángulo $\boldsymbol{\Theta}$, se denomina inclinación de la recta. Forma el ángulo en la siguiente figura:



Valor del *ángulo de inclinación*

A partir de la ecuación **m =** ***tan*** $\boldsymbol{\Theta}$, se despeja $\boldsymbol{\Theta}$ para conocer el ángulo de inclinación, es decir: **m**$= \boldsymbol{arc\ tan\ \Theta}$

El ángulo se calcula aplicando tangente inversa a la pendiente, esto quiere decir, qué si tenemos el ejemplo que la pendiente de una recta vale la unidad, el arco cuya tangente vale la unidad es de **45°**

Pendiente: Es la tangente del ángulo de inclinación. La pendiente usualmente la denotamos con la letra "**m**". Así la pendiente del segmento AB es:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{tan}(\boldsymbol{\Theta})$$

Por trigonometría Sabemos que

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{Cateto\ Opuesto}}{\boldsymbol{Cateto\ Adyacente}}$$

por lo que según la figura anterior

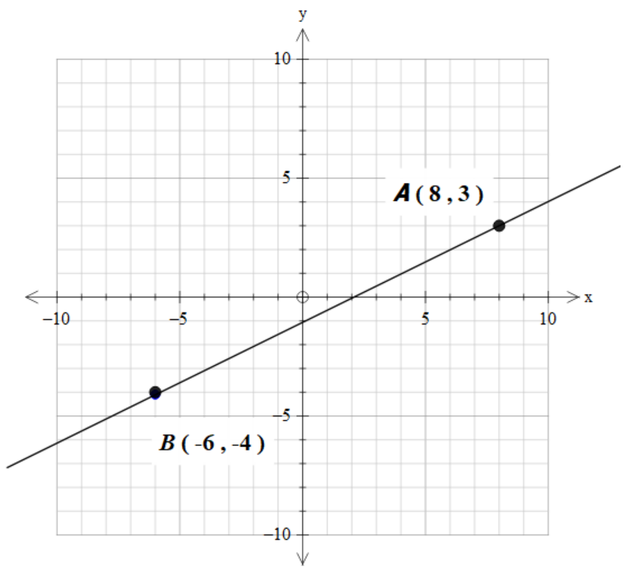
$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{tan\ \Theta} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El ángulo de inclinación del segmento puede tomar cualquier valor entre **0° ≤ θ ≤ 180°**, por lo que de acuerdo con las propiedades de la tangente se tiene:

- **m** es un numero positivo, sí **0° < θ < 90°**
- **m** es un numero negativo sí **90° < θ < 180°**
- **m = 0** sí **θ = 0°**
- **m =** ∞, sí **θ = 90°**

Analiza el procedimiento de solución de los siguientes planteamientos.

Ejemplo 1: Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que se forma con los puntos A(-6, -4) y B(8 , 3)



Al sustituir los datos en la fórmula:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-4-3}{-6-8} = \frac{-7}{-14}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}$$

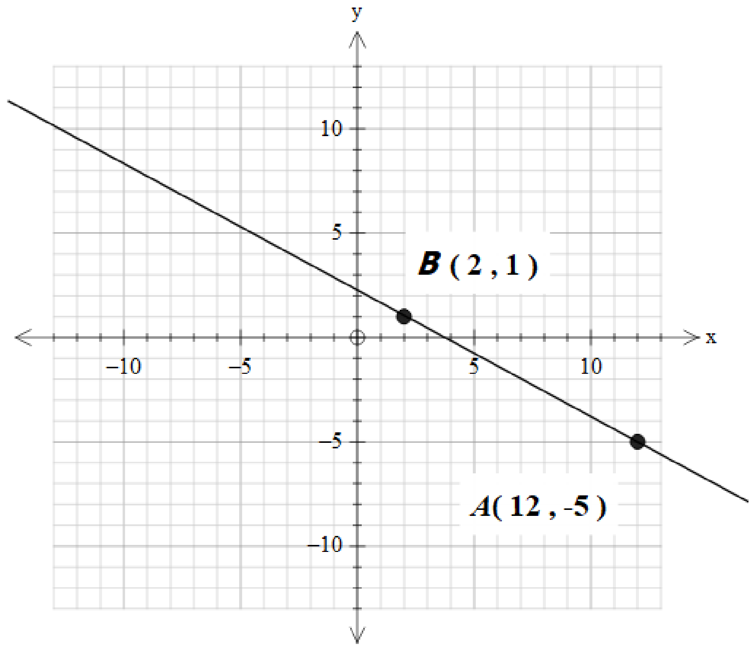
Para determinar el ángulo de inclinación, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{m} = \boldsymbol{arc\ tan\ \Theta}$$

$$\text{m} = arc\ tan\ \frac{1}{2} = arc\ tan\ (0.5)$$

$$\text{m} = 36°33´54"$$

Ejemplo 2: Encuentra la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que se forma con los puntos A (12 , -5) y B (2 , 1)



Al sustituir los datos en la fórmula:

$$\boldsymbol{m} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-5-1}{12-2} = \frac{-6}{10}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{-3}{5}$$

Para determinar el ángulo de inclinación, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{m} = \boldsymbol{arc\ tan\ \Theta}$$

$$\text{m} = arc\ tan\ \frac{-3}{5} = arc\ tan\ (-0.6)$$

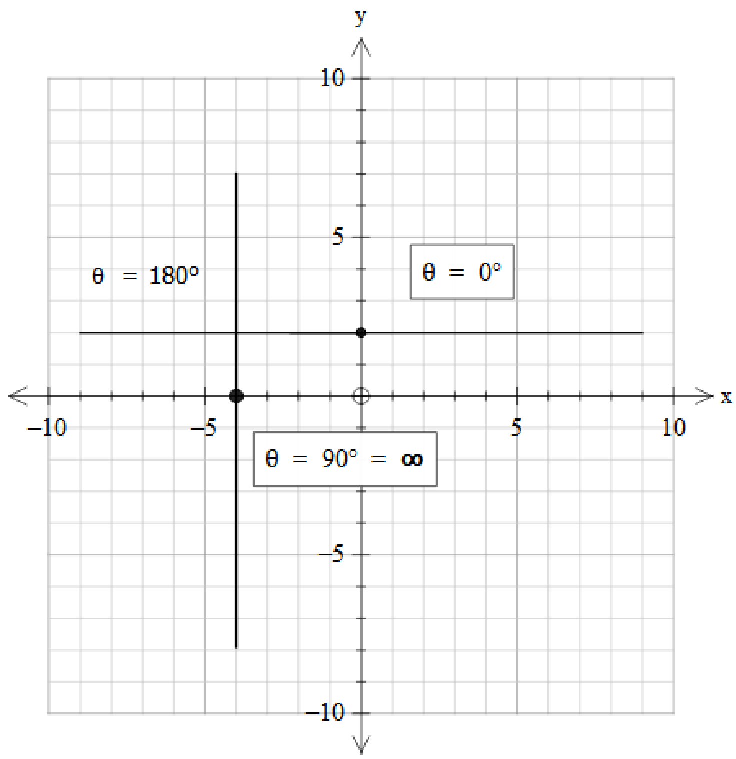
$$\text{m} = -30°05'49''$$

Como m es negativa, el ángulo $\boldsymbol{\Theta}$ es mayor que 90° pero menor que 180°, por lo que el ángulo encontrado debe ser restado a 180°.

$$\text{m} = 180° - 30°05'49''$$

$$\text{m} = 149°54'11''$$

Toda recta perpendicular al eje x no tiene pendiente, es decir, la pendiente de una recta paralela al eje y es indefinida.



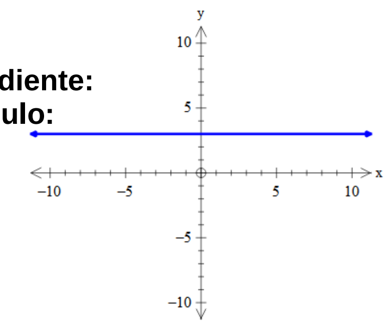
Dos rectas paralelas respectivamente a los ejes x e y, son por supuesto, perpendiculares. Se hace notar que la pendiente de la recta paralela al eje x es cero, puesto que tan 0° = tan 180° = 0, en tanto que la pendiente de la otra recta paralela al eje y es indefinida.

Actividades de Cierre

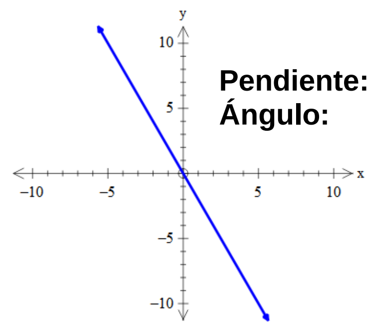
Pendiente y ángulo de inclinación.

Indica para cada uno de los siguientes casos si la pendiente de la recta es posita o negativa y como es el valor del ángulo correspondiente (mayor, menor o igual a 0° o 90°)

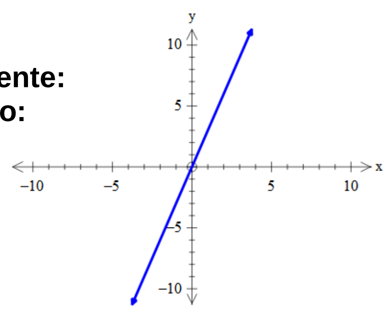
Pendiente:
Ángulo:



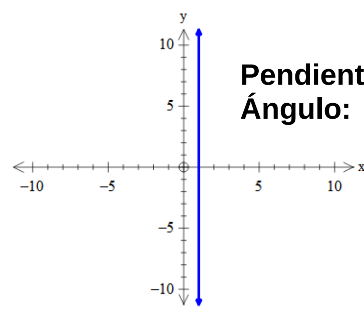
Pendiente:
Ángulo:



Pendiente:
Ángulo:



Pendiente:
Ángulo:



Considerando las diferentes formas en que se presenta el valor de la pendiente de una recta en el plano, indica cual representa cada una de las gráficas anteriores

PENDIENTE

Negativa Al aumentar la variable independiente (x), disminuye la variable independiente (y), va de derecha a izquierda y sus valores son $90° < x < 180°$	**Positiva** Al aumentar la variable independiente (x), aumenta también la variable independiente (y), va de izquierda a derecha y sus valores son $0° < x < 90°$
Cero No existe inclinación de la recta al ser completamente horizontal, por lo que el valor de la pendiente es cero.	**Indefinida** La recta es completamente vertical y el ángulo de inclinación es 90°. Se extiende hasta el infinito de manera indefinida.

Contesta correctamente las siguientes preguntas.

1. En una función creciente, cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente (**aumenta / disminuye**).

2. En una función decreciente, cuando la variable independiente aumenta, la variable dependiente (**aumenta / disminuye**).

3. En una función creciente, la pendiente de una recta tangente es (**positiva / negativa**) es decir su ángulo de inclinación es (**mayor / menor**) de 90°.

4. En una función creciente, la pendiente de una recta tangente es (**positiva / negativa**) es decir su ángulo de inclinación es (**mayor / menor**) de 90°.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

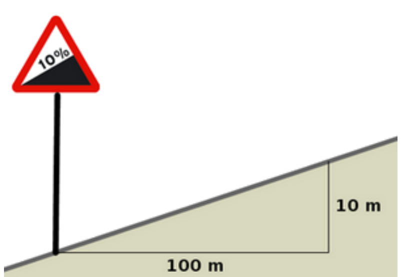
Analiza la siguiente figura e interpreta y describe la relación con la pendiente de una recta

____

____

____.

¿Qué nos indica el siguiente letrero de señal vial?

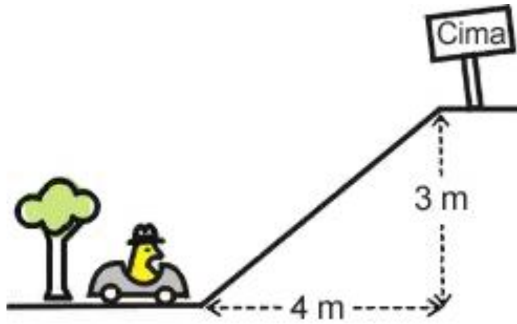


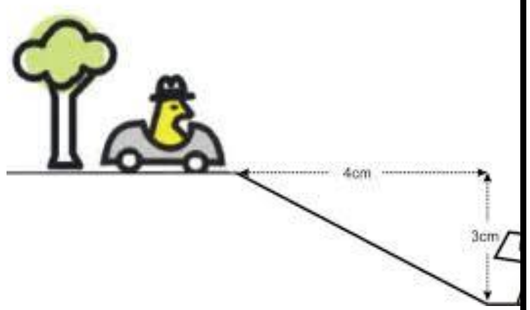
____

____

____.

Utilizando las siguientes imágenes, calcula la pendiente y el ángulo de inclinación.





Ejercicios Adicionales

1.- Determina la pendiente de las siguientes rectas cuya inclinación es:

a) 60° R = 1.73 b) $\frac{\pi}{2}$ R = ∞ c) 30° R = 0.57

2.- Determina el ángulo de inclinación de las siguientes rectas cuya pendiente es:

a) m = 0 R = 0

b) m = 2.144506 R = 64°59´59”

c) m = 1.428148 R = 55°0´0”

3.- Calcula la pendiente y el ángulo de inclinación para las rectas que se forman con los siguientes puntos:

a) A (-5 , -2) y B (7 , 5) R = $m = \frac{7}{2}$ θ = 30°15´23”

b) A (0 . 3) y B (11, -1) R = $m = \frac{-4}{11}$ θ = 160°01´01”

c) P (3 , -4) y Q (1 , 2) R = $m = -3$ θ = 108°26´06”

2.2 Formas de la ecuación de una recta y sus transformaciones.

Introducción

Existen muchas definiciones para la recta, cada una de estas definiciones tiene que ver con el contexto.

La definición según la geometría euclidiana*: "Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella"*

La definición geométrica de la recta: *"La recta es el lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos cuales quiera del lugar geométrico, el valor de la pendiente siempre resulta constante"*

La definición formal en geometría analítica es la siguiente:

"Una recta es el conjunto de todos los puntos del plano, donde las coordenadas de cada punto obedecen una relación de primer grado"

En geometría analítica, se puede determinar la ecuación de una recta, utilizando diversas formas por medio de fórmulas que están relacionadas con su pendiente y su ángulo de inclinación. La ecuación en mención se llama ecuación general de la recta representada como una ecuación de primer grado.

Para localizar una recta por medio de la ecuación general, esta se puede tener desde el inicio del problema o se puede calcular utilizando algunas ecuaciones como son punto-pendiente, dada dos puntos, pendiente-ordenada al origen y simétrica; si se obtiene la ecuación general de la recta, se puede utilizar para realizar transformaciones entre las diversas ecuaciones y la formula general de la recta.

Actividades de Apertura

Diagnóstico: Contesta las siguientes preguntas sin consultar ninguna fuente.

¿Qué significado tiene el valor de la pendiente?

¿Cómo es la pendiente, cuando el ángulo formado por la recta es obtuso?

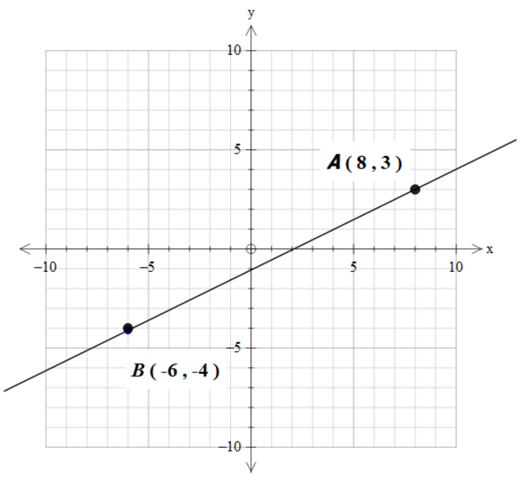
¿Cuál es el valor de la pendiente, cuando su ángulo de inclinación es de 90°?

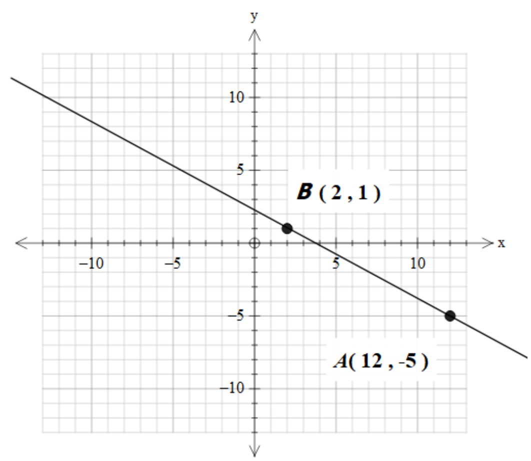
¿Cuál es valor de la pendiente y el ángulo de inclinación de las rectas horizontales?

¿Cuál es el sentido que tiene el ángulo formado con la recta y el eje de las abscisas?

Recuperación de conocimientos.

Coloca en cada gráfica si la pendiente de la recta es positiva o negativa.





____________________________ ____________________________

Actividades de Desarrollo

Determinación de la ecuación de la recta.

Línea recta. Se define como la distancia más corta entre dos puntos. Analíticamente es una ecuación de primer grado con dos variables que gráficamente, se define como el lugar geométrico de la sucesión de puntos, tales que tomados dos puntos cualesquiera diferentes $P_{1(}x_1\,,\;y_1)$ y $P_{2(}x_2\,,\;y_2)$ del lugar. El valor de la pendiente m, es siempre constante.

2.2.1 Forma Punto-Pendiente (Forma común o simplificada)

La recta se determina cuando se conoce uno de sus puntos y su dirección; analíticamente la ecuación de la recta se determina cuando de conocen las coordenadas de uno de sus puntos y su ángulo de inclinación o pendiente.

La pendiente de la recta PP_1 es: $\boldsymbol{m} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

La recta que pasa por el punto $P_{1(}x_1\,, y_1)$ cuya pendiente es m, satisface la fórmula:

$$(y - y_1) = \boldsymbol{m}\,(x - x_1)$$

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3 , 2) y la pendiente m = 2.

$(y - y_1) = \boldsymbol{m}\,(x - x_1)$

$(y - 2) = \mathbf{2}\,(x - 3)$

$(y - 2) = 2x - 6)$

$y = 2x - 6 + 2$

$y = 2x - 4$

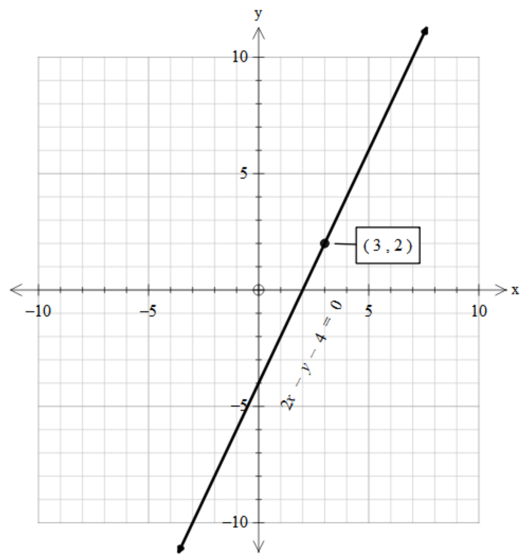
$\boldsymbol{2x - y - 4 = 0}$

m= $\boldsymbol{arc\ tan\ \Theta}$

m= $arc\ tan\ (2)$

m= 63.4349

m= $63°26'05"$



Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2 , -4) cuya pendiente es igual a **– 1/3**.

$(y - y_1) = \boldsymbol{m}\,(x - x_1)$

$(y + 4) = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{3}}\,(x - 2)$

$\mathbf{3}\,(y + 4) = -\mathbf{1}\,(x - 2)$

$3y + 12 = -1x + 2$

$x + 3y + 12 - 2 = 0$

$\boldsymbol{x + 3y + 10 = 0}$

m= $\boldsymbol{arc\ tan\ \Theta}$

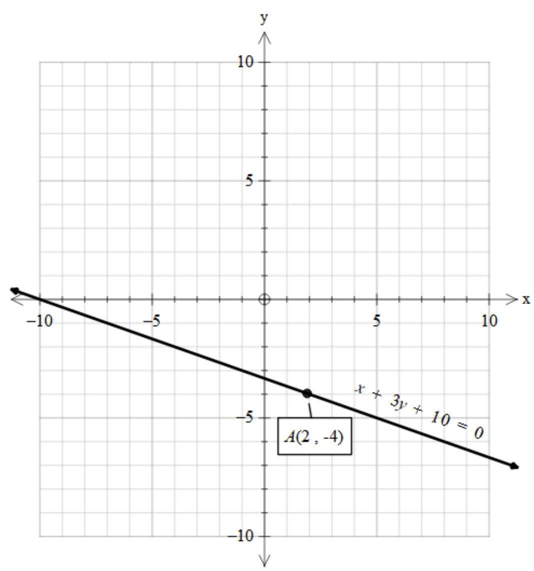
m= $arc\ tan\ \frac{-1}{3}$

m= $arc\ tan\ (-0.3333)$

m= -18.4332

m= $180 - 18.4332 = 161.5668$

m= $161°34'00''$



2.2.2 Forma dada dos puntos (Forma Cartesiana)

Por geometría. La recta queda perfectamente determinada por dos cuales quiera de sus puntos; analíticamente, la ecuación de una recta también queda perfectamente determinada cuando se conocen las coordenadas de dos cualesquiera de sus puntos.

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P_{1(}\,x_1\,,\ y_1)$ y $P_{2(}\,x_2\,,\ y_2)$ es:

$$(y - y_1) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1)$$

A esta forma de la ecuación de la recta. También se le denomina ***cartesiana***.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (-3 , -1) y B (5 , 2).

$$(y - y_1) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1)$$

$$(y + 1) = \frac{-1 - 2}{-3 - 5}\,(x + 3)$$

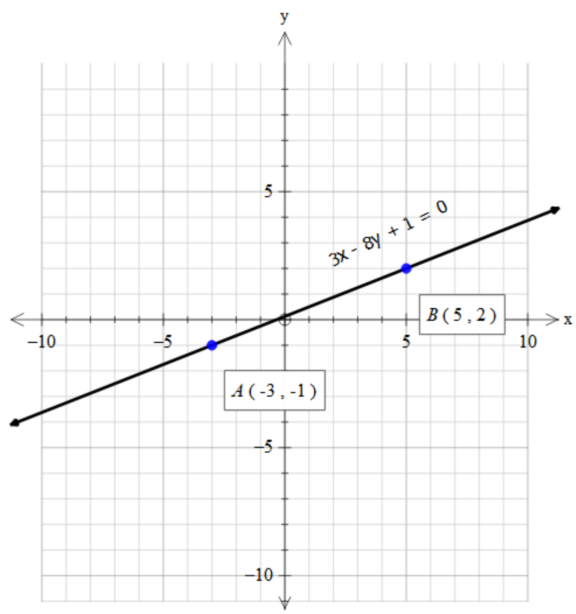
$$(y + 1) = \frac{-3}{-8}\,(x + 3)$$

$$\mathbf{-8}\,(y + 1) = \mathbf{-3}\,(x + 3)$$

$$-8y - 8 = -3x - 9$$

$$3x - 8y - 8 + 9 = 0$$

$$3x - 8y + 1 = 0$$



Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (7 , 1) y B (3 , 8).

$$(y - y_1) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$(y - 1) = \frac{1 - 8}{7 - 3}(x - 7)$$

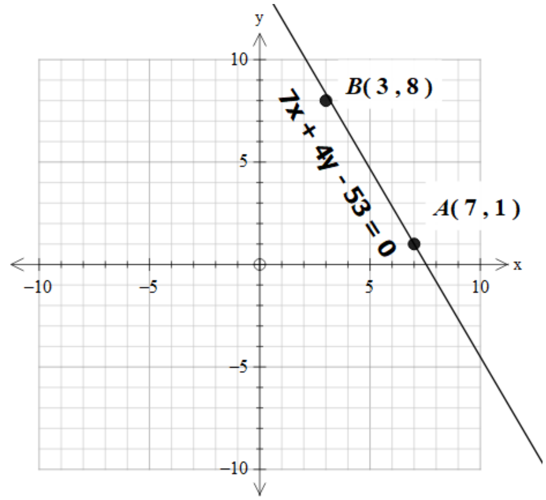
$$(y - 1) = \frac{-7}{4}(x - 7)$$

$$\mathbf{4}\,(y-1) = \mathbf{-7}\,(x-7)$$

$$4y - 4 = -7x + 49$$

$$7x + 4y - 4 - 49 = 0$$

$$\boldsymbol{7x + 4y - 53 = 0}$$



2.2.3 Forma pendiente-Ordenada al origen

Al aplicar la ecuación Punto-Pendiente para una recta L, cuya pendiente es m y pasa por el punto B (0 , b), se tiene:

$$(y - y_1) = \boldsymbol{m}\,(x - x_1)$$

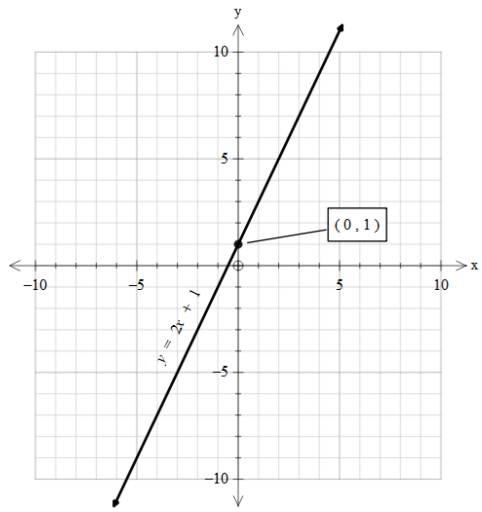
$$(y - b) = \boldsymbol{m}\,(x - 0)$$

$$(y - b) = \boldsymbol{m}\,x$$

$$\boldsymbol{y = m\,x + b}$$

La coordenada y de la intersección con el eje y es b. en otras palabras la recta se interseca con el eje y en el punto (0 , b).

Por ejemplo, la recta y = 2x + 1 tiene pendiente 2 y se interseca con el eje y en (0 , 1).



El hecho de que esta representación de la pendiente y la ordenada al origen (es decir la intersección de la recta con el eje y), es la razón por la cual se llama forma Pendiente-Ordenada al origen.

La ecuación de la recta, cuya pendiente es m. tiene su ordenada en el origen en b, es:

$$\boldsymbol{y = m\,x + b}$$

Encuentra la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a -2/7 cuya intersección con el eje y es 3.

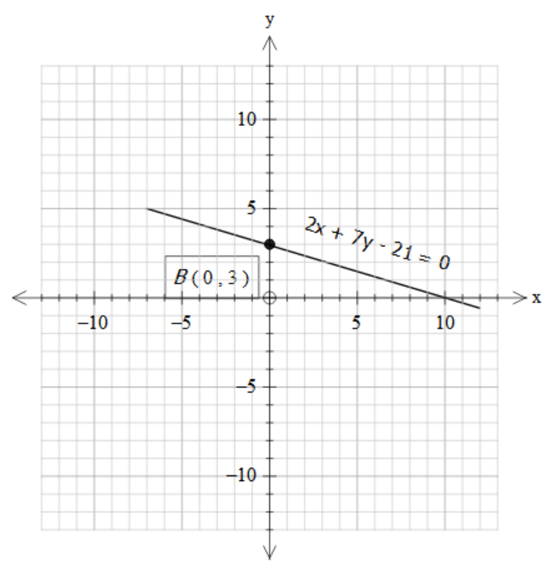
$\boldsymbol{y = m\,x + b}$

$\boldsymbol{y} = \frac{-2}{7}x + 3$

$\boldsymbol{y} = \frac{-2\,x+21}{\boldsymbol{7}}$

$7y = -2\,x + 21$

$\boldsymbol{2\,x + 7y - 21 = 0}$



Encuentra la ecuación de la recta que tiene una pendiente igual a 2 cuya intersección con el eje y es -5/2.

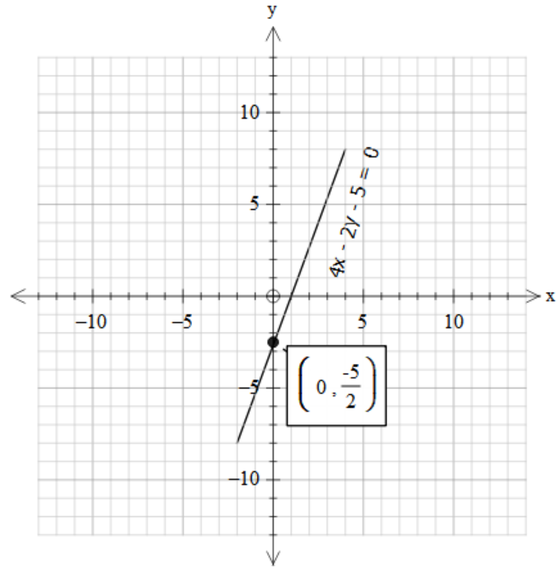
$\boldsymbol{y = m\,x + b}$

$\boldsymbol{y = 2x - \frac{5}{2}}$

$\boldsymbol{y = \frac{4\,x-5}{2}}$

$2y = 4\,x - 5$

$\boldsymbol{4\,x - 2y - 5 = 0}$



2.2.4 Forma simétrica (Canónica)

Sea una L una recta que interseca a los ejes coordenados x, y en los puntos A(a,0) y B(0,b), respectivamente.

La ecuación de la recta que interseca los ejes coordenados x e y en los puntos (a,0) y (0,b) respectivamente es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

A esta forma de ecuación de la recta, también se le denomina **reducida o abscisa-ordenada al origen.**

Las intersecciones que una recta determina sobre los ejes x e y son A (4,0) y B (0,-7) respectivamente, determina su ecuación.

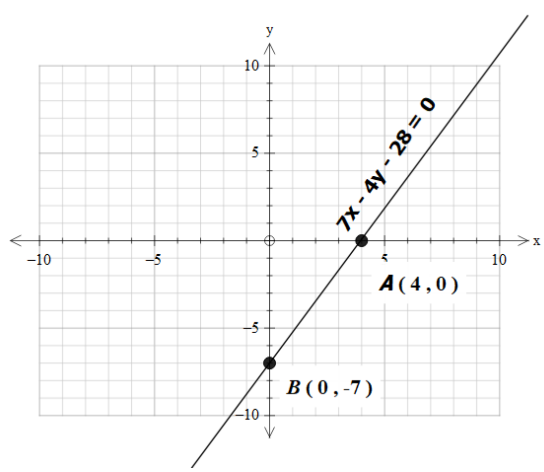
$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{x}{4} - \frac{y}{7} = 1$

$\boldsymbol{\frac{7\,x-4y}{28} = 1}$

$7x - 4y = 28$

$\boldsymbol{7\,x - 4y - 28 = 0}$



Los segmentos de una recta sobre los ejes x e y son A (-6,0) y B (0,-2). Determina su ecuación.

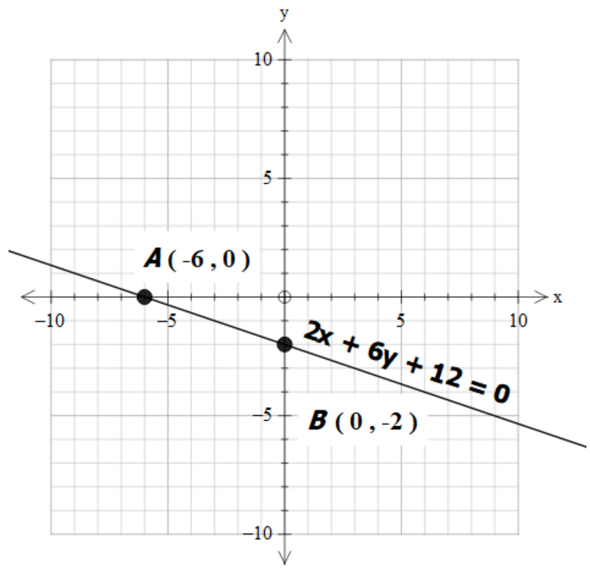
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{-6}-\frac{y}{2}=1$$

$$\frac{2\,x+6y}{-12}=\mathbf{1}$$

$$2x+6y=-12$$

$$\mathbf{2\,x+6y+12=0}$$



2.2.5 Ecuación general de la recta

La ecuación lineal en dos variables x e y, de la forma:

$$\boldsymbol{A\,x+By+C=0}$$

Se denomina forma general de la ecuación de la recta; donde los coeficientes A, B y C, son números reales, con la condición de que A o B deben ser diferentes de cero y C puede o no ser igual a cero.

La ecuación lineal en dos variables x e y, denotada por Ax + By + C = 0, representa una recta y viceversa.

Términos relacionados con la ecuación general de la recta.

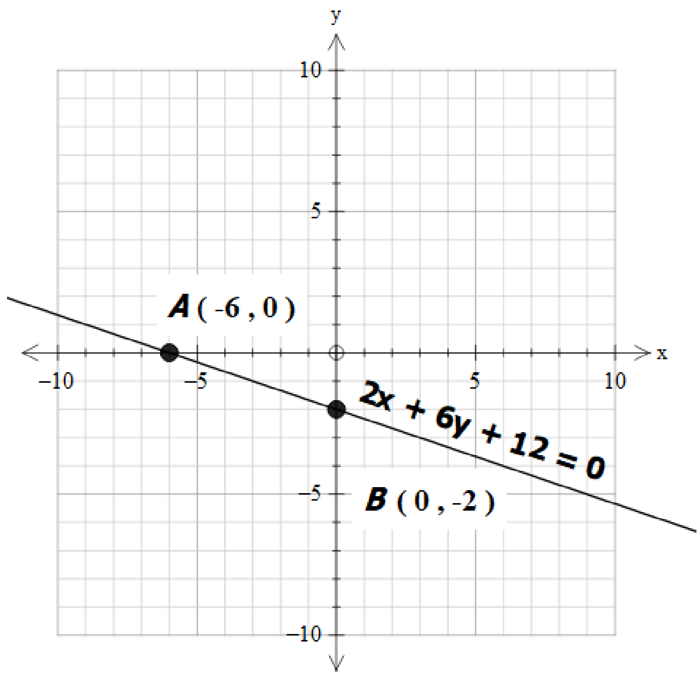
$\boldsymbol{m=-\frac{A}{B}}$	$\boldsymbol{x=-\frac{C}{A}}$	$\boldsymbol{y=-\frac{C}{B}}$
Pendiente de la recta	Abscisa en el origen	Abscisa en el origen

Calcula la pendiente de la recta $\boldsymbol{3\,x-y+6=0}$ y sus puntos que cruzan en el eje x e y.

Con los datos de la formula general se conoce que A = 3, B = -1 y C = 6, sustituyendo:

$\boldsymbol{m=-\frac{3}{-1}}$	$\boldsymbol{x=-\frac{6}{3}}$	$\boldsymbol{y=-\frac{6}{-1}}$
$\boldsymbol{m=\ 3}$	$\boldsymbol{x=-2}$	$\boldsymbol{y=\ 6}$

La pendiente es positiva m = 3 y los puntos donde cruza la recta son A (-2 , 0) y B(0 . 6).



Con la ecuación general de la recta, se puede determinar la ecuación pendiente-ordenada al origen con un simple despeje.

$$\mathbf{3\,x - y + 6 = 0}$$

$$\mathbf{3\,x + 6 = y}$$

$\boldsymbol{y = 3\,x + 6}$ **de la forma** $\boldsymbol{y = m\,x + b}$ Donde m = 3 y B (0 , 6)

Actividades de Cierre

Ecuación general de la recta y sus transformaciones.

Como ya hemos visto antes, las ecuaciones de dos variables representan lugares geométricos en el plano. Iniciaremos nuestro estudio de lugares geométricos de ecuaciones de rectas y sus transformaciones de lo más sencillo a lo complejo.

Encontrar la ecuación de la recta cuya pendiente es 3 que pasa por el punto A (1 , -2). Represéntala en su forma pendiente-ordenada al origen y en su forma general.

$(y - y_1) = \boldsymbol{m}\,(x - x_1)$

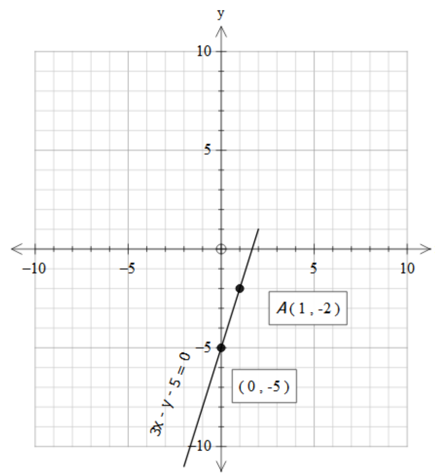
$(y + 2) = \mathbf{3}\,(x - 1)$

$(y + 2) = \mathbf{3}\,x - 3$

$\boldsymbol{y} = \mathbf{3}\,x - 3 - 2$

$\boldsymbol{y = 3\,x - 5}$ **Ec. Pendiente-Ordenada al origen**

$\boldsymbol{3\,x - y - 5 = 0}$ **Ec. General**



Halla la ecuación simétrica de la recta, cuya abscisa al origen es -3 y la ordenada al origen es 4. Represente la ecuación en su forma Pendiente-ordenada al origen y su forma general.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$ ← Tienes que sumar fracciones

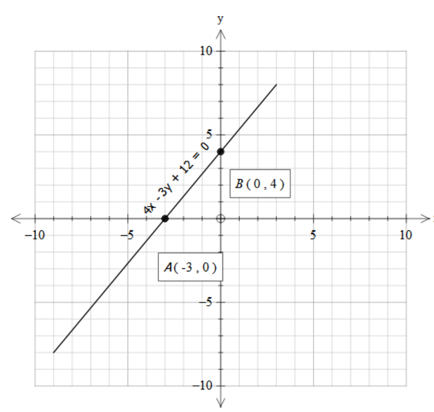
$\frac{4x - 3y}{\mathbf{-12}} = \mathbf{1}$ ← Pasamos el -12 multiplicando

$4x - 3y = -12$ ← Despejamos el término con “y”

$3y = 4x + 12$

$y = \frac{4x+12}{\mathbf{3}}$ **Ec. Pendiente-Ordenada al origen**

$\boldsymbol{4\,x - 3y + 12 = 0}$ **Ec. General**



Halla la forma simétrica de la ecuación de la recta 4x – 5y – 20 = 0. Representa la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen y en su forma general.

$$\mathbf{4\,x - 5y - 20 = 0}$$

$$\mathbf{4\,x - 5y = 20}$$

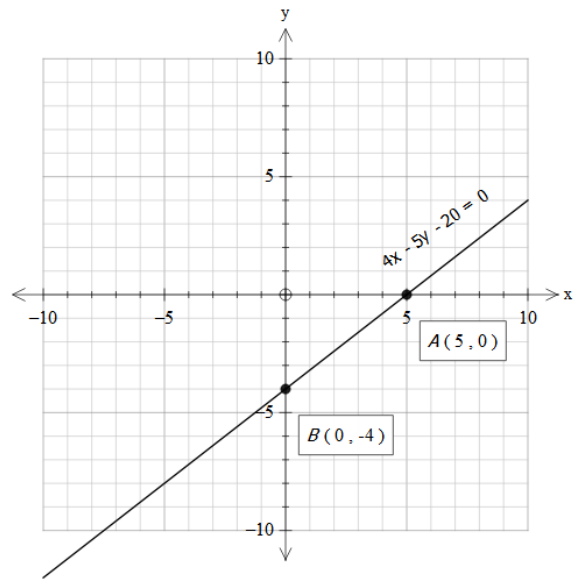
$$\frac{4x}{20} - \frac{5y}{20} = \frac{20}{20}$$

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 1$$ **Ec. Simétrica**

$$\mathbf{5y = 4x - 20}$$

$$y = \frac{4x-20}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - 4$$ **Ec. Ordinaria**



Actividades de Contextualización o Transversalidad

Un servicio básico de televisión por cable cuesta $280 al mes y comprende 65 canales. Si deseas contratar el servicio MAS, que permite contratar más canales, el costo mensual es de $25 pesos por cada canal solicitado.

a) Escribe una ecuación para el pago mensual “y” por “x” canales.

b) Utiliza la ecuación anterior para calcular el costo de contratar 46 canales.

c) Grafica la función. ¿Qué representa, la intersección de la recta con el eje y?

d) Calcula la pendiente e indica si es creciente y decreciente.

e) Determina la ecuación general de la recta.

Ejercicios Adicionales

1.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene la pendiente que se indica:

a) A (5 . 9) y $m = 3$

b) A (3 . 5) y $m = \frac{1}{2}$

c) A (0 . 2) y $m = \frac{3}{4}$

2.- Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:

a) A (2 , 4) y B (-7 , 5)

b) M (-1 , 3) y N (2 , 6)

c) R (0 , 2) y S (7 , 3)

3.- Determina la ecuación de la recta que tiene su pendiente dada y su intersección en el eje y que se indica:

a) $m = -\frac{3}{5}$ intersección en -3

b) $m = 4$ intersección en $\frac{6}{5}$

c) $m = \frac{1}{6}$ intersección en $-\frac{8}{3}$

4.- Determina la ecuación de la recta cuyas intersecciones con los ejes x e y se indican respectivamente:

a) A (-5 , 0) y B (0 , -2)

b) K (-4 , 0) y L (0 , -2)

c) A (7 , 0) y B (0 , -5)

5.- Escribe todas las formas posibles de la ecuación de la recta y su forma general a la recta que pasa por los puntos A (1 , 2) y B (2 , 5)

a) Dada dos puntos

b) Punto-Pendiente

c) Pendiente-ordenada al origen

d) Simétrica

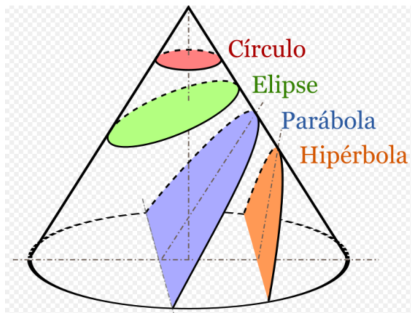
e) General

Tema 3 | Cónicas

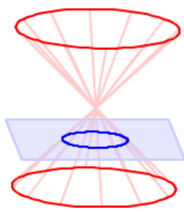
Las Cónicas

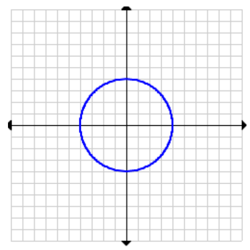
¿Qué son las cónicas?

Se llaman curvas cónicas a todas aquellas que se obtienen cortando un cono con un plano que no pasa por su vértice. Debido a su origen las curvas cónicas se llaman a veces secciones cónicas.

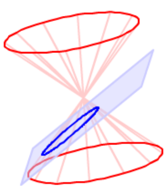


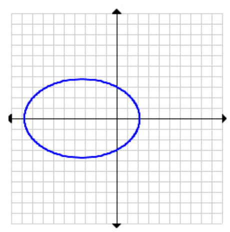
La Circunferencia. Si se hace un corte paralelo a la base se obtiene una circunferencia.



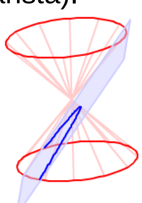


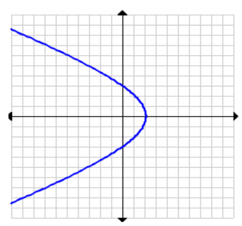
La Elipse. Se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.



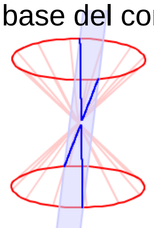


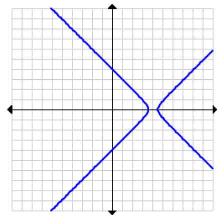
La Parábola. Se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz (arista).





La Hipérbola. Se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es perpendicular a la base del cono.





3.1 Circunferencia

3.1.1 Elementos de una circunferencia

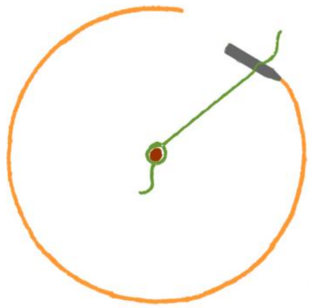
Introducción

La circunferencia es uno de los elementos de la geometría más importantes que están normalmente en la vida, aunque no lo parezca y desde los tiempos antiguos que es usada. En la prehistoria, por ejemplo, con la invención de la rueda se dio inicio a toda la tecnología de hoy en día, todo gracias a este invento, la rueda, y aunque sea indirectamente, y en este caso tenemos aplicaciones de la circunferencia. Está en todas partes. ¿Qué objetos de la vida cotidiana tienen esta forma?

Una construcción sencilla de este lugar geométrico puede realizarse en tu cuaderno, utilizando un alfiler, un trozo de hilo pequeño y tu lápiz. ¿Te imaginas cómo? ¿Qué representaría el alfiler? ¿y qué representaría el hilo?

Aunque estamos seguros de que sabes cómo hacerlo, veamos el proceso:

1. Fijamos el alfiler en cualquier punto de tu libreta (este representara el centro de la circunferencia)
2. Amarramos el hilo al alfiler y al lápiz.

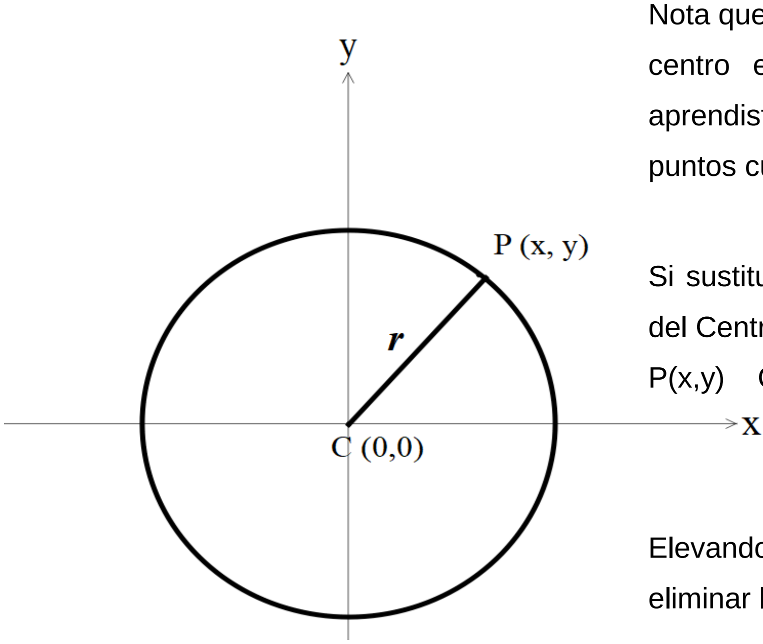


3. Estiramos lo más que se puede el lápiz para que el hilo quede tenso (el hilo representa el radio)
4. Luego giramos el lápiz sin perder la tensión del hilo (Con ello aseguramos que cada punto que conforman la línea trazada siempre estén a una misma distancia del alfiler, es decir, que equidisten del centro)
5. La línea que se forma, son todos esos puntos del plano (infinitos) que conforman el lugar geométrico llamado circunferencia.

Actividades de Apertura

3.1.2 Ecuación ordinaria de la circunferencia

Como podrás haber observado en la actividad anterior, la circunferencia se forma por una infinidad de puntos que tienen la propiedad de tener la misma distancia con respecto al centro. Si ubicamos el centro de una circunferencia en el origen de un plano de coordenadas, tendrías una herramienta sencilla para obtener su ecuación.



Nota que la distancia entre cualquier punto y el centro es igual al radio. En la unidad I aprendiste a calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si sustituimos las coordenadas del punto P y del Centro, se tiene:

P(x,y) C(0,0)

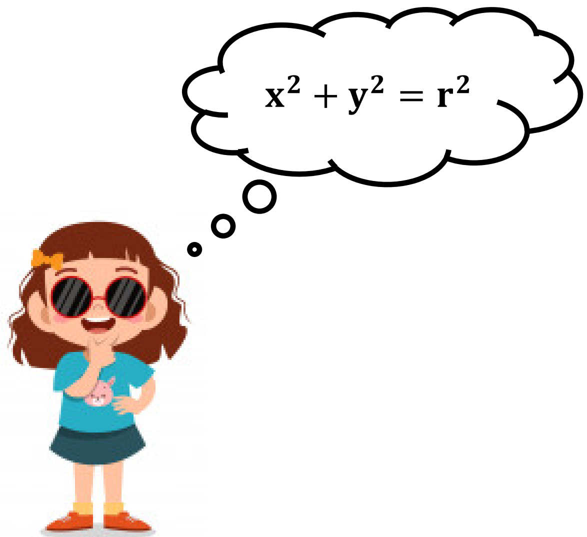
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0_1)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ representa una circunferencia con centro en el origen. Se le conoce como ecuación ordinaria de la circunferencia. Pero ¿qué significado tiene esa relación entre los tres términos de la ecuación?

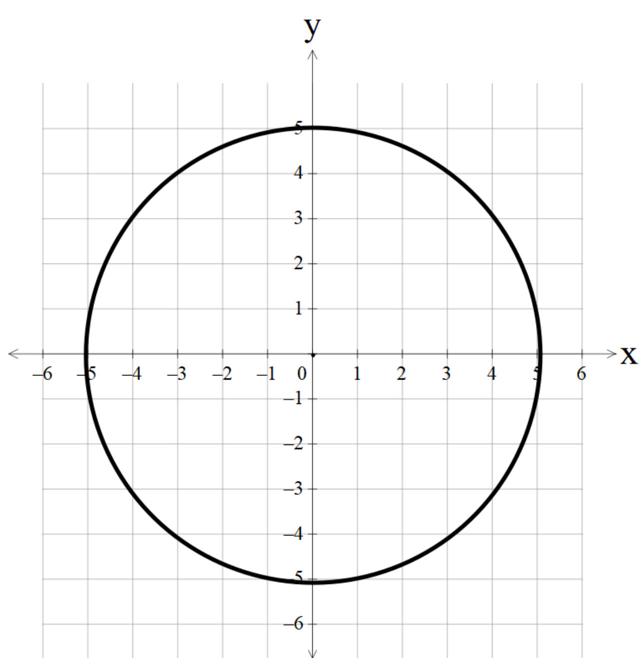


Observa que x e y son las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia y r el valor del radio. Literalmente la ecuación nos dice que, si sumamos los cuadrados de las coordenadas de cualquier punto, obtenemos el cuadrado del radio.

Observa ésta circunferencia de radio igual a 5. Si sustituimos este valor en la ecuación, tendremos la ecuación de ésta circunferencia en particular:

Si r=5, entonces la ecuación es $\mathbf{x^2 + y^2 = (5)^2}$, es decir:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$$



Nota que se pueden determinar a simple vista algunos puntos cuyas coordenadas son números enteros, por ejemplo:

A (5,0), B (0,5), D (-5,0) y E (0-5)

Estos son sencillos de localizar porque están en la intersección de los ejes con la circunferencia.

¿Cómo sabemos con certeza que pertenecen a la circunferencia? Recuerda el significado que guarda la ecuación. En este caso como $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$**,** significa que todos los puntos deben cumplir ésta condición.

Veamos: El punto A(5,0) pertenece a la circunferencia si se cumple que la suma de los cuadrado de sus coordenadas son iguales a 25

A (5,0)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(5)^2 + (0)^2 = 25$$
$$25 + (0)^2 = 25$$

B (0,5)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(0)^2 + (5)^2 = 25$$
$$0 + 25 = 25$$

D (-5,0)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(-5)^2 + (0)^2 = 25$$
$$25 + (0)^2 = 25$$

E (0,-5)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(0)^2 + (-5)^2 = 25$$
$$0 + 25 = 25$$

Observa que pueden deducirse más puntos, por ejemplo F(-4,3) y G(3,-4). Comprobemos si pertenecen a la misma circunferencia:

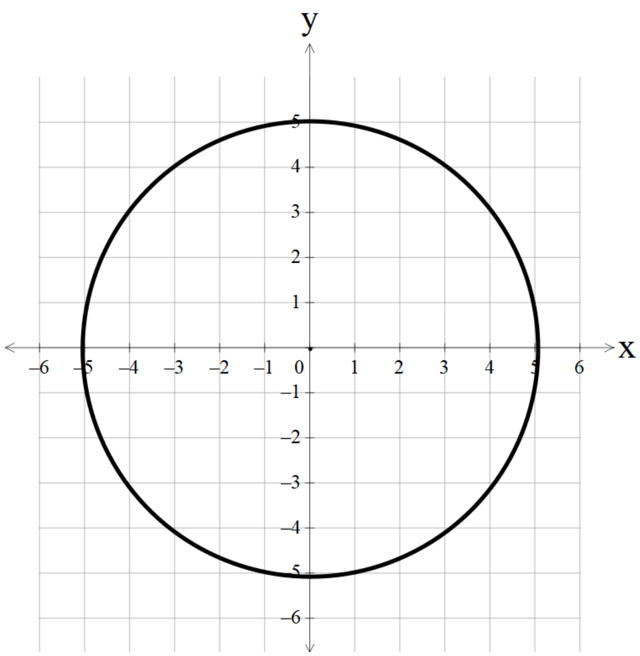
F (-4,3)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(-4)^2 + (3)^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$
$$25 = 25$$

G (-4,3)

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(3)^2 + (-4)^2 = 25$$
$$16 + 9 = 25$$
$$25 = 25$$

Actividad 1: Localiza cuatro puntos más en la circunferencia y demuestra que pertenecen a la misma aplicando el procedimiento anterior.



H (__,__)

I (__,__)

J (__,__)

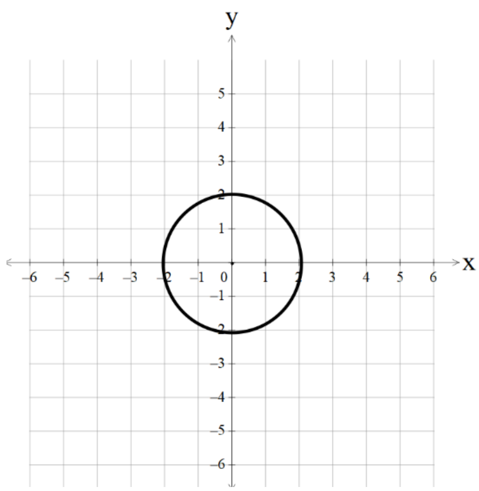
K (__,__)

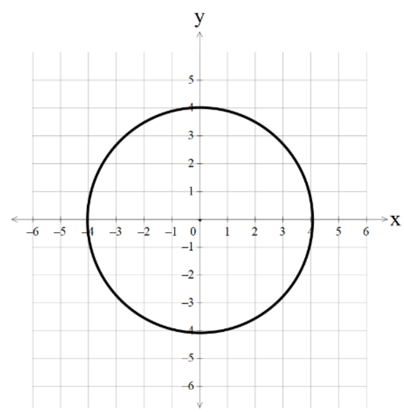
H (__,__) $x^2 + y^2 = 25$ $(\_\_)^2 + (\_\_)^2 = 25$ $\_\_\_ + \_\_\_ \quad = 25$	I (__,__) $x^2 + y^2 = 25$ $(\_\_)^2 + (\_\_)^2 = 25$ $\_\_\_ + \_\_\_ \quad = 25$
J (__,__) $x^2 + y^2 = 25$ $(\_\_)^2 + (\_\_)^2 = 25$ $\_\_\_ + \_\_\_ \quad = 25$	K (__,__) $x^2 + y^2 = 25$ $(\_\_)^2 + (\_\_)^2 = 25$ $\_\_\_ + \_\_\_ \quad = 25$

Actividades de Desarrollo

Realiza los siguientes ejercicios:

1. Determina por simple inspección la ecuación de las siguientes circunferencias:





2. Deduce cuanto mide el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

a) $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$ **r=** _______

b) $\mathbf{x^2 + y^2 = 25}$ **r=** _______

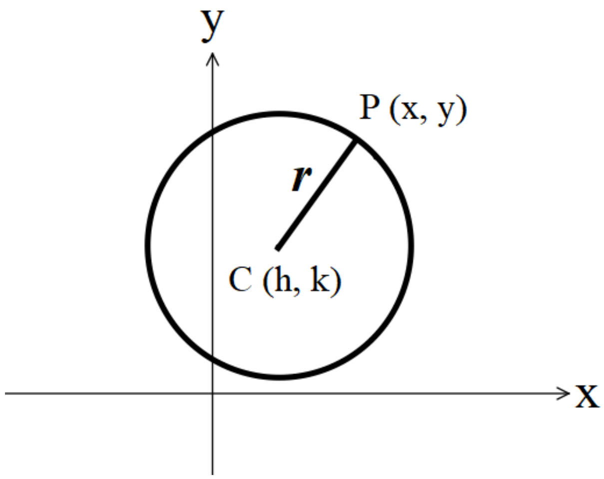
c) $\mathbf{x^2 + y^2 = 8}$ **r=** _______

3. En cada uno de los siguientes casos se da el radio de una circunferencia de centro en el origen. Deduce qué ecuación tiene cada circunferencia:

a) r=3 Ecuación: ________________________
b) r=1 Ecuación: ________________________
c) r=8 Ecuación: ________________________
d) r=10 Ecuación: ________________________
e) r=2.5 Ecuación: ________________________
f) r=$\sqrt{10}$ Ecuación: ________________________

3.1.3 Análisis de la ecuación ordinaria de la circunferencia y la general

Si ubicamos el centro de una circunferencia fuera del origen de un plano de coordenadas, digamos en un punto de coordenadas C(h, k); podemos determinar la ecuación de cualquier circunferencia en cualquier posición del plano. El procedimiento es prácticamente igual al que estudiaste en la sección de apertura.



Recuerda que la distancia entre cualquier punto y el centro es igual al radio. Aplicamos nuevamente la fórmula de la distancia entre dos puntos cualesquiera:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si sustituimos las coordenadas del punto P y del Centro, se tiene:

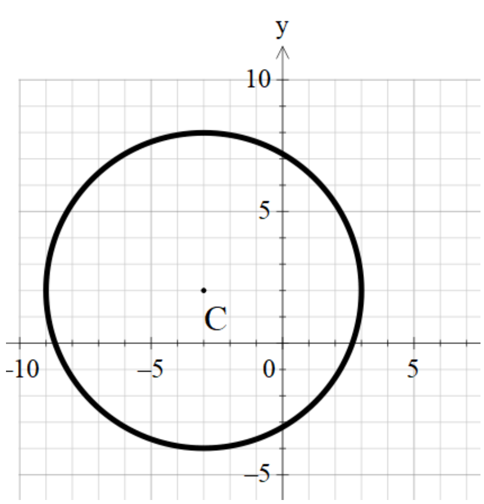
P(x,y) C(h,k)

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz:

$$\boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

La ecuación $\boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$ representa una circunferencia con centro fuera del origen o incluso en el origen también, pues en este caso basta hacer h y k iguales a cero. Si conocemos las coordenadas de su centro y el valor del radio, podemos obtener fácilmente la ecuación de una circunferencia. Ejemplo:



Observa detenidamente la gráfica y notarás que el centro de la circunferencia está en C(-3,2). Ahora determina el radio midiendo los cuadros entre el centro y un punto de la circunferencia por ejemplo hacia la derecha del centro. Notaras que el radio mide 6. Con estos datos puedes determinar la ecuación:

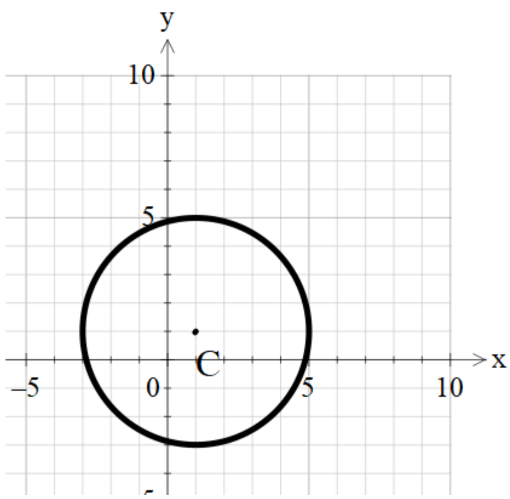
$$\boldsymbol{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

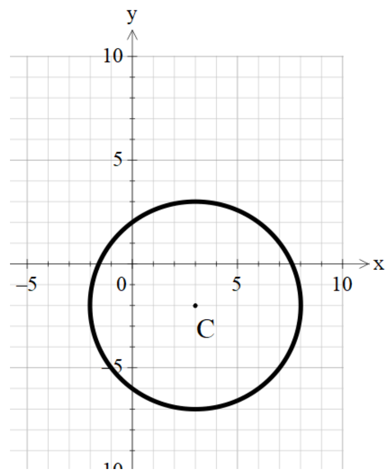
$$\boldsymbol{[x-(-3)]^2 + (y-2)^2 = (6)^2}$$

$$\boldsymbol{(x+3)^2 + (y-2)^2 = 36}$$

Realiza los siguientes ejercicios:

4. Determina por simple inspección la ecuación de las siguientes circunferencias:





5. Deduce las coordenadas del centro y cuanto mide el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:
   a) $(\mathbf{x}-\mathbf{2})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{3})^2=\mathbf{4}$ **r=** ______

   b) $(\mathbf{x}+\mathbf{1})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{4})^2=\mathbf{16}$ **r=** ______

   c) $(\mathbf{x}+\mathbf{7})^2+(\mathbf{y}+\mathbf{3})^2=\mathbf{25}$ **r=** ______

6. En cada uno de los siguientes casos se da el radio de una circunferencia de centro en el origen. Deduce qué ecuación tiene cada circunferencia:

   a) r=3, C(-2,3) Ecuación: ______________________
   b) r=1, C(-1,-1) Ecuación: ______________________
   c) r=8, C(5,-3) Ecuación: ______________________
   d) r=10, C(-4,3) Ecuación: ______________________
   e) r=2.5, C(0,3) Ecuación: ______________________
   f) r=$\sqrt{10}$, $C(-2,0)$ Ecuación: ______________________

3.1.4 Conversión de la forma ordinaria a la general y viceversa

Actividades de Cierre

La ecuación general de cualquier cónica se obtiene al desarrollar sus ecuaciones ordinarias. Para el caso de la circunferencia tomamos como referente la ecuación:

$$\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

Desarrollando los binomios se obtiene:

$$(x^2-2xh+h^2)+(y^2-2yk+k^2)=r^2$$

Quitando paréntesis e igualando con cero:

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-2xh-2yk+h^2+k^2-r^2=0}$$

Ésta es la ecuación de la circunferencia en su forma general

A veces se conoce la ecuación de una circunferencia en su forma general y debe determinarse sus elementos. Para convertir una ecuación general a su forma ordinaria, seguimos el proceso inverso que se siguió anteriormente. Comunmente se le deno,ina método de completar cuadrados. Por ejemplo, si la ecuación en la forma ordinaria de una circunferencia es:

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y+1)^2=9}$$

Entonces su ecuación general se obtiene al desarrollar como el procedimiento anterior:

Desarrollando los binomios se obtiene:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=9$$

Quitando paréntesis e igualando con cero:

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1-9=0$$

$$\boldsymbol{x^2+y^2-4x+2y-4=0}$$

Supón ahora que se te solicita obtener la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria a partir de la ecuación general anterior:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

Procede como sigue:

1. Como vas a obtener una ecuación de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Debes obtener dos binomios al cuadrado, a su vez éstos se obtendrán de dos trinomios cuadrados perfectos, como podrás notar al analizar el procedimiento anterior de manera invertida. Por lo que debes agrupar los términos que contienen la misma variable y pasar el término independiente al segundo miembro de la ecuación (de allí se obtendrá el radio)

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4$$

2. Ahora completamos los trinomios cuadrados perfectos que serán el paso previo a la ecuación. Se conoce el primer y segundo término de cada uno, así que para obtener el restante aplicamos la regla del desarrollo del binomio al cuadrado de manera invertida, es decir se saca mitad al coeficiente de **x** e **y** y se eleva al cuadrado:

$$(x^2 - 4x + \_\_\_) + (y^2 + 2y + \_\_\_) = 4$$

$$\boxed{2 \longrightarrow 4} \qquad \boxed{1 \longrightarrow 1}$$

Los números obtenidos se suman para completar los trinomios cuadrados perfectos en el primer término de la ecuación y en el segundo término para mantener la igualdad de la ecuación:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 4 + 4 + 1$$

$$\boxed{(x - 2)^2 \quad + \quad (y + 1)^2 \quad = 9}$$

Ejemplo: Convierte la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ a su forma ordinaria.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

1. Agrupa los términos con la misma variable y pasa el término independiente al segundo miembro de la ecuación:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) = -6$$

2. Completa cuadrados:

$$(x^2 - 2x + \_\_\_) + (y^2 + 6y + \_\_\_) = -6$$

$$\boxed{1 \longrightarrow 1} \qquad \boxed{3 \longrightarrow 9}$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

3. Convierte a binomios al cuadrado:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$\boxed{(x-1)^2 \quad + \quad (y+3)^2 \quad = 4}$$

Ejercicios:

1. Convierte las siguientes ecuaciones generales a su forma ordinaria:

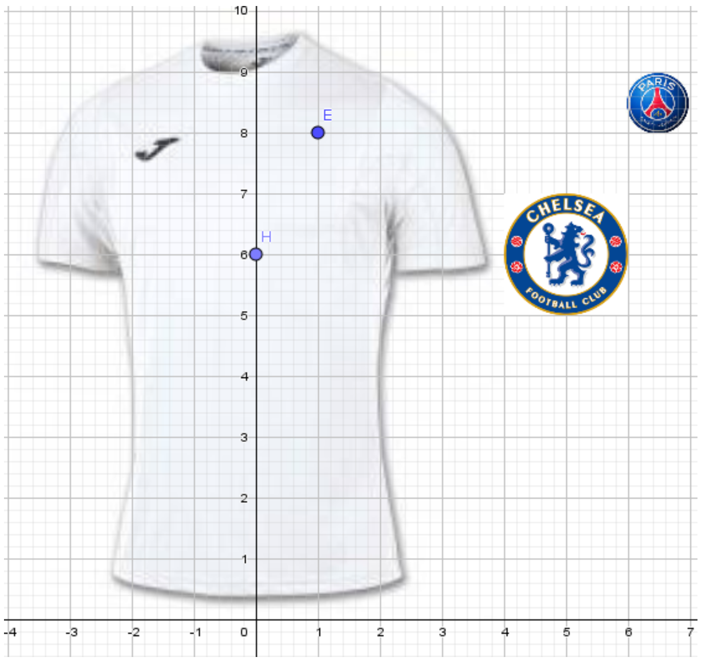
a) $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 33 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$

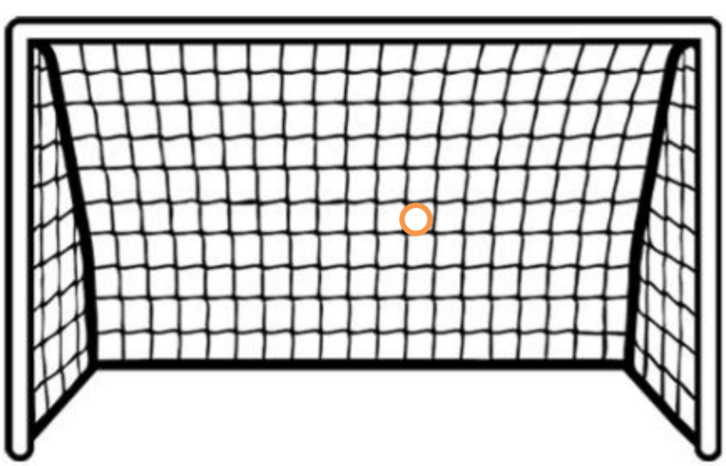
c) $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 4 = 0$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1. Una tienda de serigrafia quiere colocar dos sellos en una playera, en el punto E iría el logo del PSG y en el punto H el logo del Chelsea. Determina las ecuaciones canónicas y generales de cada sello según corresponda la posición dada.



2. A continuación, se presentan ecuaciones generales que representan goles de un balón que tiene radio 1. Dibuja los goles correspondientes a partir del centro dado.



$$x^2 + y^2 - 14x - 6y + 57 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 4y + 28 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 14x + 6y + 57 = 0$$

3. En la central de autobuses del norte de la ciudad de México, hay un nicho para los feligreses de la Virgen de Guadalupe, este tiene un círculo en su base de aproximadamente 5 m de diámetro. Considera esta circunferencia para determinar lo siguiente:

a) Sí pusiéramos un plano cartesiano con el origen en el centro de la circunferencia. ¿Cómo es su ecuación ordinaria?

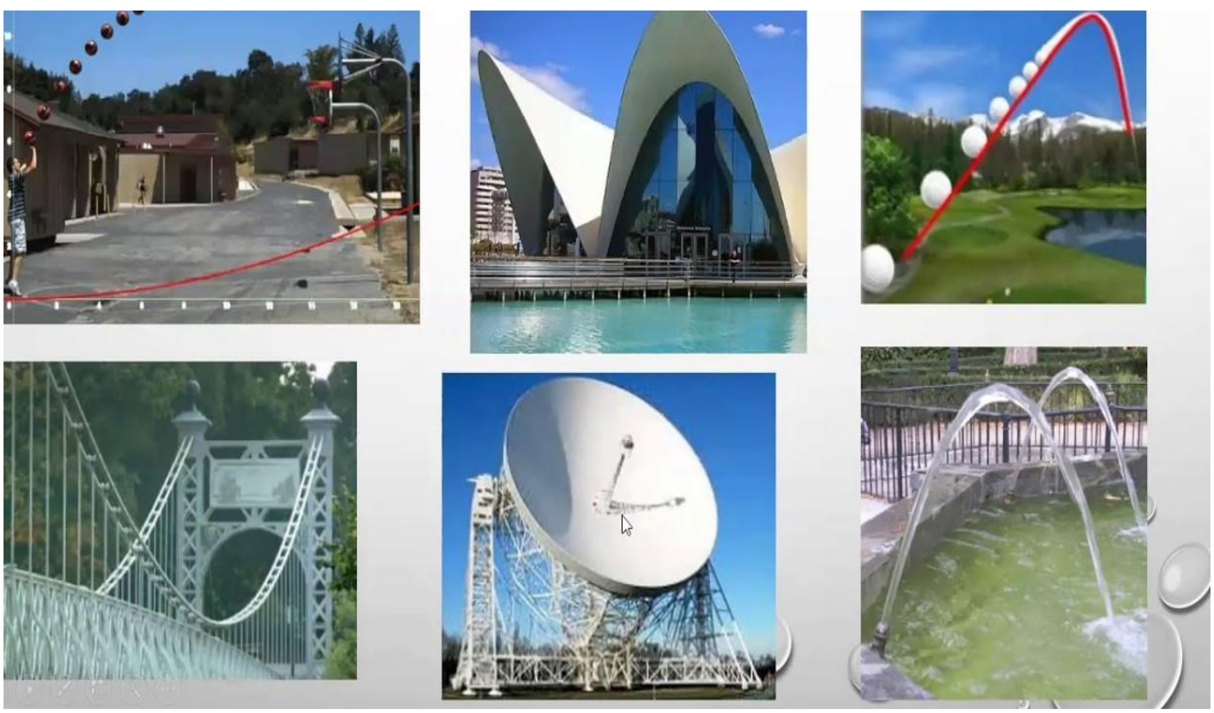
b) Sí pusiéramos el plano cartesiano tangente a la circunferencia, pero en el tercer cuadrante. ¿Cómo es su ecuación ordinaria?

c) Sí pusiéramos el plano cartesiano en el cuarto cuadrante, quedando el centro de la circunferencia del nicho a 5 metros del origen del plano cartesiano y a 4 metros de las ordenadas. ¿Cómo es su ecuación?

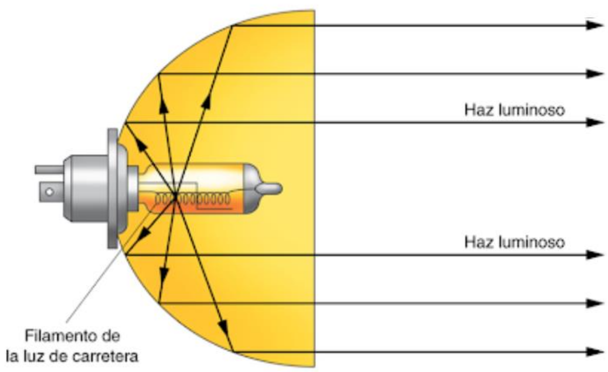
3.2 Parábola

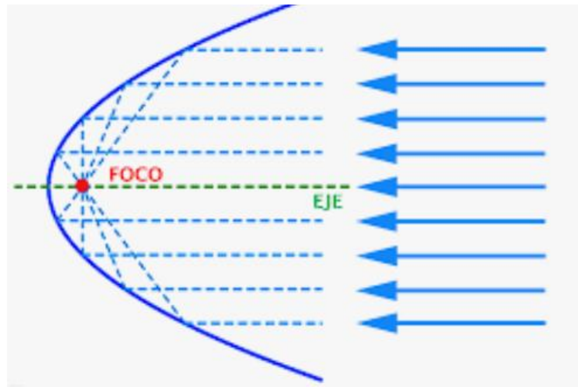
Introducción

En las imágenes siguientes podrás observar la forma de la parábola, en la naturaleza el crecimiento de un plátano, la trayectoria que describe un objeto lanzado al aire (balón, proyectil, una piedra), el fluir del agua en una fuente, el oleaje en el mar etcétera. El ser humano al estudiar las características y propiedades de la parábola ha construido antenas parabólicas, faros, reflectores parabólicos, radares, bocinas, estufas solares, puentes suspendidos, la montaña rusa, algunos diseños arquitectónicos tienen esa estructura, hasta algo muy simple como un paraguas, etcétera. Por lo que la parábola admite una amplia variedad de aplicaciones.

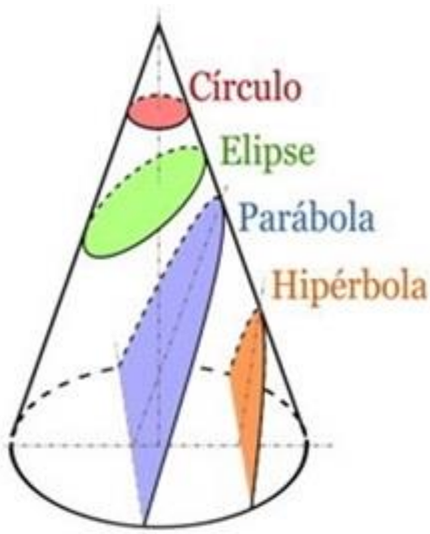


La superficie generada al hacer girar una parábola alrededor de su eje es una superficie parabólica; dicha superficie tiene la propiedad de ser reflectora. Es decir, situado un punto luminoso en el foco, los rayos al chocar con la superficie parabólica se reflejan paralelos al eje focal (figura izquierda), y recíprocamente, los rayos que llegan paralelos al eje chocan con la superficie parabólica y se concentran en el foco (figura derecha), ejemplo las antenas parabólicas. Estas superficies son las únicas con esas propiedades.





La parábola forma parte de las secciones cónicas, y se obtiene cuando se interseca o corta un cono circular recto con un plano, como se muestra en la figura C.



Actividades de Apertura

3.2.1 Elementos de la Parábola

¡Vamos a la práctica! Construye de una parábola marcando dobleces en una hoja de papel.

Materiales: hoja de papel tamaño carta, regla, lápiz.

1. Divide el ancho de una hoja en dos partes iguales marcando un doblez. La base o parte inferior del ancho de la hoja es la ***Directriz***, figura 1.

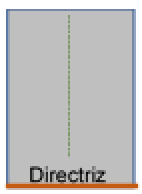


fig. 1

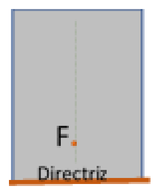


fig. 2

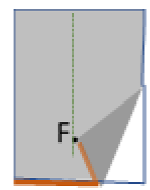


fig. 3

2. Dibuja un punto F (**Foco**) sobre el doblez, a 5 o 6 centímetros arriba de la Directriz (no importa si es menos de 5 o más de 6 cm), figura 2.

3. Has coincidir el extremo derecho de la hoja (Directriz) con el punto F (foco), marque un doblez, figura 3.

4. Marca todos los dobleces posibles, recorriendo la directriz 3 milímetros aproximadamente por el punto Foco haciendo que coincidan, marque el doblez. Así sucesivamente, recorra la directriz (3 mm) por el punto Foco marcando el doblez, deténte hasta que haya recorrido la mitad de la directriz, figura 4.

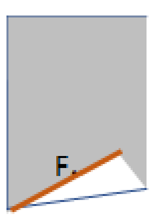


fig. 4

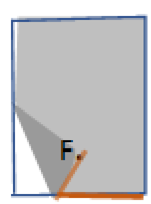


fig. 5

5. Se hace coincidir el extremo izquierdo de la Directriz (hoja) con el punto y marca un doblez figura 5.

6. Marca todos los dobleces posibles al recorrer la directriz por el punto F, de la misma forma que en el paso 4. La parábola debe quedar como en la figura 6.

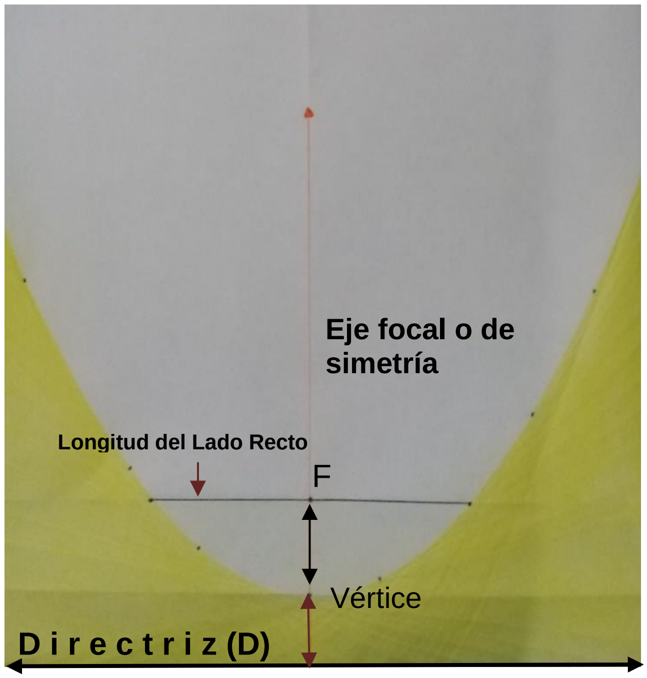


figura 6. Elementos de la parábola

7. Realiza los siguientes dobleces, a la altura del foco marque un doblez paralelo a la directriz, y un doblez que divida el espacio entre el foco y la directriz en dos partes iguales.
   Marca nuevamente el doblez que pasa por el foco y sea perpendicular a la directriz, figura 6.

Indica los elementos de la parábola.

El punto fijo se llama *foco* (**F**)

La recta fija se llama Directriz (D).

Eje focal o de simetría es la recta sobre la cual se encuentra el foco.

El vértice (**V**) es el punto en que la curva corta al eje de simetría o focal.

La cuerda **CC’** que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal se llama *lado recto,* al medir su longitud se nombra longitud del lado recto (***llr***).

La distancia del foco al vértice es el parámetro p y es la misma distancia del vértice a la directriz.

Actividades de Desarrollo

3.2.2 Ecuación ordinaria de la Parábola

1. Dibuja sobre el contorno de la Parábola 5 o 6 puntos cualesquiera, nombre cada punto con P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5.

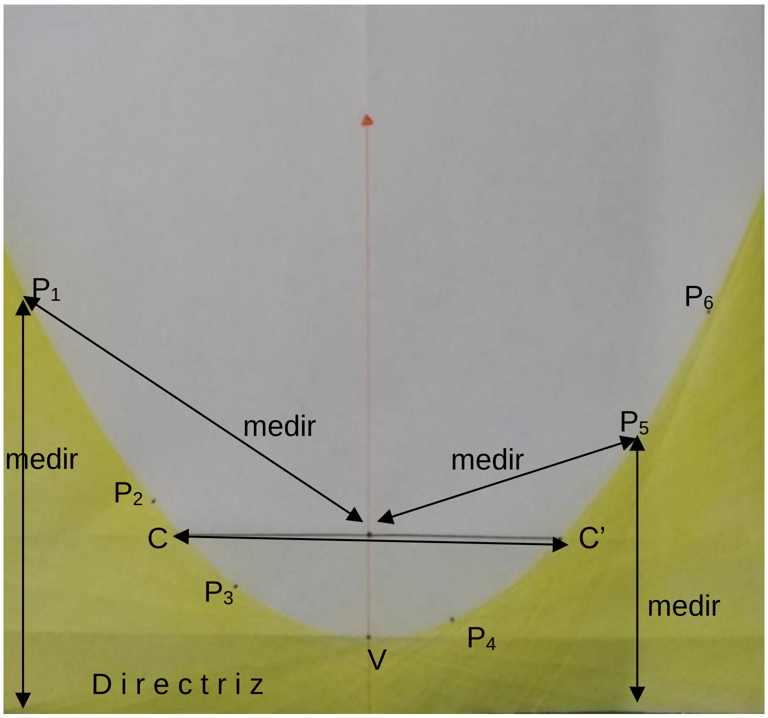


figura 7

Anota en una tabla las siguientes medidas.

2. Mide con una regla la distancia del punto P_1 al foco y del P_1 a la directriz (como se observa la flecha en la figura 7), después del P_2 al foco y del P_2 a la directriz, de la misma forma mida la distancia con los otros puntos al foco, y del punto a la directriz.
3. También, mide la distancia del foco al vértice, del vértice a la directriz.
4. Finalmente mide la longitud del lado recto (CC\`), figura 7.

Puntos/Longitud	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Vértice
PF						
PD						
Foco						
Directriz						

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo es la distancia de un punto cualesquiera al foco y del mismo punto a la directriz? ________________________.

   Considera como error de medición si se presenta una pequeña variación (uno o dos milimetro) en sus resultados, puede decir que son iguales.
2. ¿Cuál es el valor de p? ___________________.
3. ¿Cuál es la Longitud del lado recto: $\ell\ell r$ = ________.
4. Corrobora que la $\ell\ell r$ = 4p, cierto o falso: ______
5. Observa los resultados y llene los siguientes espacios.
6. Definición: Una parábola es el lugar geométrico o conjunto de todos los ______________ en el plano cartesiano que equidistan (tienen igual distancia) de un punto fijo llamado _____________ y de una recta fija llamada _________________.

Observa en la figura 7, que una parábola es simétrica respecto a su eje, además se encuentra en un plano cartesiano (x, y). La definición de la parábola puede usarse para derivar la forma estándar de la ecuación de una parábola con vértice en el origen V (0, 0), y directriz paralela al eje x o al eje y.

Considera, las coordenadas de un punto P_1 (x, y), del foco F (0, p), y de la directriz D (x, -p). Recuerda que el parámetro **p** es la distancia del vértice al foco y es igual a la distancia del vértice a la directriz.

El eje **x** es la horizontal que pasa por el vértice, eje y es la vertical que pasa por el foco y es el eje focal o de simetría.

La distancia del punto P_1 al foco (F) es igual a la distancia del mismo punto a la directriz (D): $P_1F = P_1D$

Al determinar ambas distancias con la ecuación de distancia entre dos puntos:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ al sustituir se tiene:

Las coordenadas del P_1 (x, y) y el foco F (0, p), la distancia del P_1F es:

$$d_{P1F} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2}$$

Las coordenadas del P_1 y directriz D son: P_1(x, y), D (x, -p) y la distancia del P_1D es:

$$d_{P1D} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2} = \sqrt{y^2 + 2py + p^2}$$

Igualamos el resultado de ambas distancias:

$\sqrt{x^2+y^2-2py+p^2}=\sqrt{y^2+2py+p^2}$ se eliminan los radicales

$x^2+\cancel{y^2}-2py+\cancel{p^2}=\cancel{y^2}+2py+\cancel{p^2}$ se eliminan y^2 y p^2 por ser términos iguales con el mismo signo, en ambos lados de la ecuación, se simplifica

$x^2-2py = 2py$ - 2py pasa sumando del lado derecho

$x^2 = 2py+2py=4py$

Conclusión: **La Ecuación cartesiana u ordinaria de la Parábola** con vértice en el origen y **eje focal sobre el eje y** es:

$$\boldsymbol{x^2 = 4\,py}$$

Si la parábola abre hacia arriba el valor de **p** es positivo (**p** > 0), figura 8.

Si la parábola abre hacia abajo el valor de **p** es negativo (**p** < 0), figura 9.

las coordenadas del foco son F (0, **p**), la ecuación de la directriz: y = - **p.**

La longitud del lado recto: llr = |4**p**|

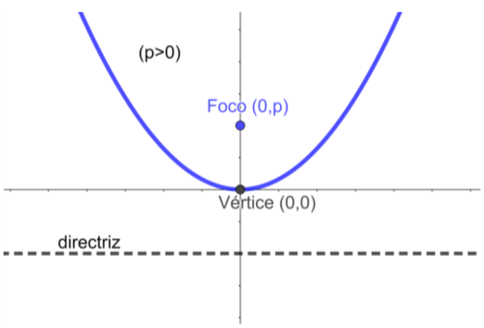


Figura 8

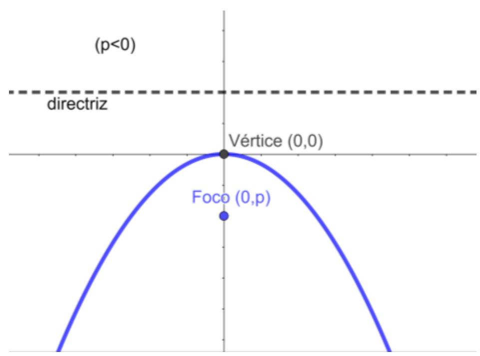


Figura 9

De igual forma se obtiene la **ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola** con vértice en el origen V (0, 0) y **eje focal sobre el eje x,** es:

$$\boldsymbol{y^2 = 4p}\,x$$

Si la parábola abre a la derecha el valor de **p** es positivo (**p** > 0), figura 10.

Si la parábola abre a la izquierda el valor de **p** es negativo (**p** < 0), figura 11,

Las coordenadas del foco F (**p**, 0), la ecuación de la directriz: x = - **p**.

La longitud del lado recto: llr = |4**p**|

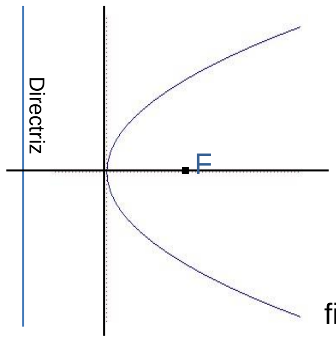


figura 10

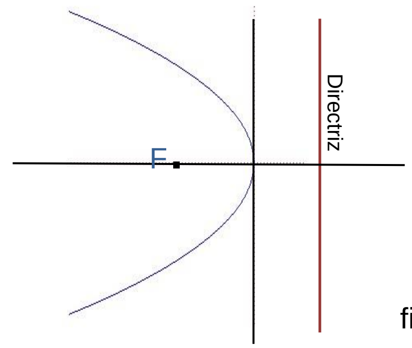


figura 11

Ejemplo 1.

Una parábola con vértice en el origen V (0, 0) y su eje focal coincide con el eje "y" pasa por el punto P (4, -2).

a) Determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.
b) Dibuja la gráfica correspondiente.

Solución.

a) Determina la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = \mathbf{4}\,\boldsymbol{py}$

Como la parábola pasa por el punto (4, -2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación $x^2 = \mathbf{4}\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{y}$ por lo tanto, se sustituyen las coordenadas del punto en la ecuación para conocer el valor de **p** el cual no se conoce.

Se tienen: 4^2 = 4(-2) **p** = 16 = -8 **p**; se despeja a **p;** 16/-8 = **p;** **p** = -2

Se sustituye el valor de **p** en la Ecuación buscada: $x^2 = \mathbf{4}\,\boldsymbol{py} = \mathbf{4(-2)}\boldsymbol{y} = \mathbf{-8}\boldsymbol{y}$

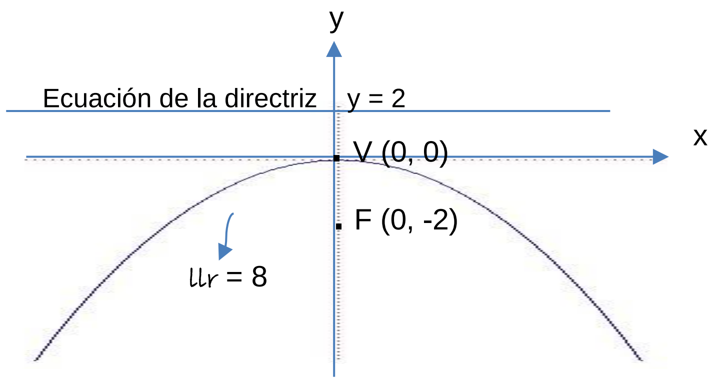
Ecuación cartesiana de la parábola: $x^2 = \mathbf{-8}\boldsymbol{y}$

Sabemos que el eje focal se encuentra sobre el eje "y", por lo que las coordenadas del foco son F(0 , p) = F(0, -2); la ecuación de la directriz es y = -p = -(-2) = 2, es decir y = 2.

La longitud del lado recto: $\ell\ell r$ = |4**p**| = | 4(-2) | = | -8 | = 8

El valor de **p** es negativo (p < 0) por lo que la parábola abre hacia abajo.

b) Dibuja la gráfica correspondiente



Ejemplo 2

Determina la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto P (0, - 3), la ecuación de la directriz es la recta y = 3. Hallar la longitud del lado recto.

Solución.

Sea P (x, y) un punto cualesquiera de la parábola, de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, se tienen; la distancia del foco al punto.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, sustituyendo $d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-3))^2}$

$d = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 6y + 9} =$

Como ésta distancia debe ser igual a la comprendida entre el punto P (x, y) y la directriz de ecuación y = 3, entonces:

$d = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 3)^2} = y - 3$; elevando al cuadrado y simplificando

$x^2 + y^2 + 6y + 9 = (y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$; $x^2 + \cancel{y^2} + 6y + \cancel{9} = \cancel{y^2} - 6y + \cancel{9}$

los términos iguales y del mismo signo se eliminan, la ecuación queda: $x^2 + 6y = -6y$

Ecuación de la parábola: $x^2 = -12y$; $x^2 = 4\boldsymbol{p}y$.

La longitud del lado recto es: $\ell\ell r$ = |4**p**| = | -12 | = 12; es decir **p** = 3

La Parábola con vértice fuera del origen y eje focal paralelo a un eje coordenado.

Las coordenadas de la parábola con vértice en el punto V (h, k) distinto al origen, indicarán que se encuentra fuera del origen. Se presentan dos casos considerando el eje focal:

Caso 1. Con eje focal paralelo al eje x.

La ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen V (h, k), y eje focal paralelo al eje “x”, es de la siguiente forma:

$$(y - k)^2 = 4\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - h)$$

Esta ecuación se conoce como ecuación cartesiana, estándar, ordinaria o canónica de la parábola.

La parábola con eje focal paralelo al eje x, abre a la derecha o izquierda como se indicó con vértice en el origen.

Si **p** es positivo (p > 0) la parábola abre a la derecha.

Si p es negativo (p < 0) la parábola abre a la izquierda.

Las coordenadas del foco F (h + **p**, k)

La ecuación de la directriz: x = h – **p.**

La longitud del lado recto: llr = |4**p**|

Caso 2. Con eje focal paralelo al eje y.

La ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola con vértice fuera del origen V (h, k), y eje focal paralelo al eje "y", es de la siguiente forma:

$$(x-h)^2 \ = 4\boldsymbol{p}(y-k)$$

La parábola con eje focal paralelo al eje y, abre hacia arriba o hacia abajo como se indicó con vértice en el origen.

Si **p** es positivo (p > 0) la abre hacia arriba.

Si p es negativo (p < 0) abre hacia abajo

Las coordenadas del foco F (h, k + p),

La ecuación de la directriz: x = k – **p.**

La longitud del lado recto: llr = |4**p**|

Ejemplo 3.

Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto V (3, 4), y el foco el punto F (3, 2). También indica la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto y graficar.

Solución:

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje de simetría, además, en este caso cada uno de estos puntos tienen la misma abscisa 3, se concluye que el eje focal de la parábola es paralelo al eje "y".

La ecuación cartesiana de esta parábola es de la forma: $(x-h)^2 = 4\boldsymbol{p}\,(y-k)$, al sustituir las coordenadas del vértice V (3, 4) se tiene: $(x-3)^2 = 4\boldsymbol{p}(y-4)$

Se observa que falta conocer el valor del parámetro **p**, recuerde que **p** es la distancia que hay del vértice al foco, por lo que d = 4 - 2 = 2, si localizas ambos puntos en el plano cartesiano podrás darte cuenta con facilidad de esa distancia; además, el foco se encuentra abajo del vértice, por lo que la parábola abre hacia abajo y **p** es negativa.

Al sustituir el valor de **p** = - 2 en la ecuación se tiene: $(x-3)^2 = 4(\mathbf{-2})(y-4)$**.**

La ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola es. $(x-3)^2 = -8(y-4)$

La longitud del lado recto es: lr = |4**p**| = | 4(-2) | = |- 8 | = 8

La ecuación de la directriz es: y = k - **p,** y = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6

y = 6

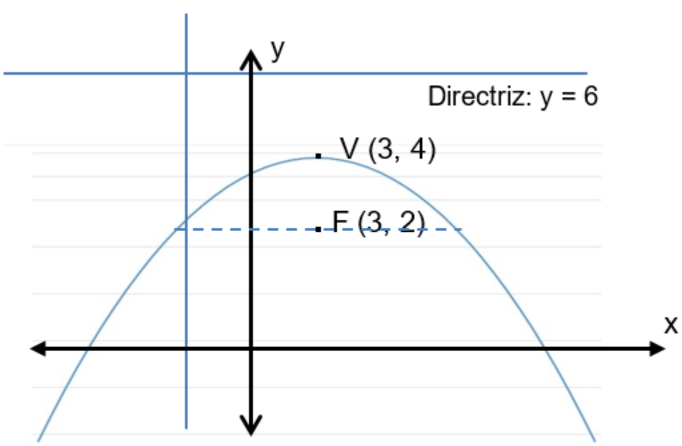
Al resolver algebraicamente la ecuación cartesiana y simplificar tendremos la Ecuación General de la Parábola, es decir,

$(x-3)^2 = -8(y-4)$

$x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$

$x^2 - 6x + 8y + 9 - 32 = 0$

$x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$ Ecuación general de la parábola con vértice V (3, 4)



Gráfica de la parábola

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Determina la ecuación de la parábola que construyó, recuerde que el vértice se encuentra en el origen V (0, 0) el punto puede ser $P_{2,}$ mide en tu parábola la distancia del foco al vértice ese valor es el parámetro **p,** el eje focal sobre el eje “y”.

2. Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen V (0, 0), eje focal o de simetría sobre el eje “x”, pasa por el punto P (3, 4) y **p** = 2.

3. Se desea construir una antena parabólica de televisión, la parábola que la forma tiene ecuación $y^2 = 12\,x$. ¿A qué distancia se encuentra el foco? para tener una buena señal en su televisor. Además, determina el eje focal o de simetría, las coordenadas del vértice y el foco, la longitud del lado recto, la ecuación de la directriz y la distancia del vértice al foco.

4. Determina la ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola de vértice V(2, 3), de eje paralelo al de coordenada “y”, y pasa por el punto P(4, 5).

5. La ecuación cartesiana de una parábola es $(y-2)^2 = 8(\mathbf{x}-3)$**,** determina el eje focal o de simetría, las coordenadas del V(h, k) y foco, el valor del parámetro p, dibuja la gráfica.

Actividades de Cierre

La ecuación general de la parábola.

Una ecuación de segundo grado en las variables “x” e “y” que carezca del término en x y, puede escribirse de la forma:

$$A\,x^2 + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Representa la ecuación general de la parábola si:

Cuando $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$; $C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$

La ecuación representa una parábola con eje de simetría o focal paralelo a (o coincide con) el eje “x”.

Cuando $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$; $A\,x^2 + D\,x + E\,y + F = 0$

La ecuación representa una parábola con eje de simetría o focal paralelo a (o coincide con) el eje “y”.

Ejemplo 4.

Halla la ecuación de la parábola con vértice en el punto V (3, 2) y foco F (5, 2).

Solución:

Como el vértice es V(3, 2) y el foco es F(5, 2), observamos que la ordenada es la misma, la abscisa es diferente, por lo que la distancia el vértice al foco es $5 - 3 = 2$, **p** = 2. Además, la parábola tiene eje focal paralelo al eje x, la ecuación es de la forma

$$(y-k)^2 = 4\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-h)$$

Al sustituir las coordenadas del vértice V(3, 2), **p** = 2 se tiene: $(y-2)^2 = 4(2)(\boldsymbol{x}-3)$ La ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola es:

$$(\mathrm{y}-2)^2 = 8(\mathbf{x}-3)$$

Desarrolla y simplifica la ecuación, para obtener la Ecuación General de la Parábola.

Pasar todos los términos del lado izquierdo se tiene:

$$\mathrm{y}^2 - 8 \times -4\mathrm{y} + 4 + 24 = 0,$$

La Ecuación General de la Parábola con vértice V (3, 2) y foco F (5, 2) es:

$$y^2 - 4y - 8\times + 28 = 0$$

Resuelve los siguientes ejercicios

1. Construye un cuadro sinóptico con la información de la parábola, incluya la definición, elementos que la definen, los diferentes tipos de ecuaciones, las coordenadas de foco, como abre la parábola dependiendo del eje focal y valor de **p** (+ o -), la ecuación de la directriz, longitud de lado recto.

2. Determina la ecuación en su forma general de la parábola con vértice en el punto V (6, 3) y foco F (4, 3).

3. Determina el vértice, foco y directriz de la parábola y graficar.
   a) $\times^2 + 4\times - 6y + 10 = 0$
   b) $y^2 - 4\times - 4 = 0$

4. Se desea construir un arco parabólico de metal para que sea el símbolo de una localidad de Oaxaca, en su diseño se contempla una altura de 10 metros y un claro de 24 metros. Determine:
   a) La ecuación cartesiana u ordinaria de la parábola considerando que el vértice se encuentra sobre el eje y.
   b) La ecuación de la parábola en su forma general.
   c) Las coordenadas del foco.
   d) Dibuja la gráfica de la parábola, de valores a x y encuentra los valores de y, para que la gráfica quede bien conformada.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Resuelve los siguientes ejercicios

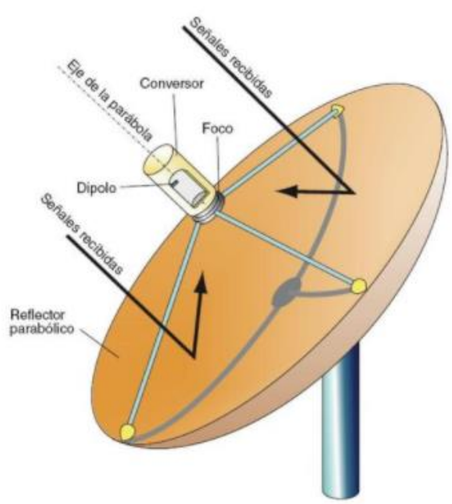
1. El monumento a los Héroes, conocido como Arco parabólico se encuentra ubicado en Tacna Perú. Construido con piedra de cantería de color rosáceo mide 18 metros de altura y un claro de 28 metros. Determine:
   a) La ecuación de la parábola, considerando que el punto más alto es el vértice V(0, 18), el eje focal sobre el eje "y".
   b) ¿En que coordenadas se encuentra el foco del arco parabólico?.
   c) Para darle forma a la parábola fue necesario determinar el valor de "y" dando valores a "x". Determina los valores de "y", para los valores de x siguientes: -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.
   d) Dibuja la Gráfica de la parábola.

2. Una sección transversal de una antena parabólica grande está dada por la ecuación: $y = \frac{x^2}{200}, \quad 0 \leq x \leq 100$. El equipo transmisor y receptor está situado en el foco, determina las coordenadas del foco.

3. Un cohete sigue una trayectoria dada por la función cuadrática $y = 2.4x - 0.02x^2$, donde x es la distancia horizontal, y es la distancia vertical ambas medidas en metros. Dibuja la gráfica de la trayectoria mostrando la altura máxima que alcanza el cohete y los puntos donde y = 0

4. Un reflector de un radio telescopio tiene forma parabólica, de manera que todas las ondas de radio provenientes del espacio que entren paralelas a su eje sean reflejadas a la antena en su foco (figura 12). Si la sección eficaz del reflector está dada por la ecuación $x^2 = 100y$, donde "x" y "y" están en metros.

   a) Determina la altura de la antena en el foco.
   b) Determina las coordenadas del punto (x, y) mostrado en el dibujo, en el que las ondas de radio se reflejan en ángulos rectos hacia el eje de la parábola (como sugerencia determine la distancia de la directriz y vea sus coordenadas de C y C').



5. En la figura anterior se observa el anteproyecto de la construcción de un puente que comunica a Tuxtla Gutiérrez con San Cristóbal de las casas, el arco del puente es una parábola de 80 metros en su base y su máxima altura máxima es de 21.5 metros aproximadamente, determine la ecuación de esta parábola bajo las siguientes condiciones:

a) Sí el vértice de la parábola coincide con el origen del plano cartesiano.
b) Sí el origen del plano cartesiano está a la izquierda de donde comienza la parábola.
c) Sí el origen del plano cartesiano está a la derecha de donde termina la parábola.
d) Sí el origen del plano cartesiano coincide con el plano de la carretera en el centro de la parte de los brazos de la parábola.

Con referencia al inciso (d) que altura tendrá la parábola a 10 metros del origen del plano cartesiano, a 20 metros del origen del plano cartesiano y a 40 metros del origen del plano cartesiano.

Ejercicios Adicionales

Resuelve los siguientes ejercicios

1. Determina las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas.
   a) $x^2 = 4y$
   b) $y^2 = 6y$
   c) $x^2 = -8y$

2. Determina la ecuación parábola con foco F (3, 0), vértice (0, 0) y directriz x + 3 = 0

3. Determina la ecuación parábola con foco F (1, 3), vértice (-2, 3). Así mismo, hallar los elementos faltantes

4. Determina la ecuación parábola con foco en el punto F (-2, -1), lado recto es el segmento entre los puntos (-2, 2) y (-2, -4).

5. Demuestra que la ecuación $y^2 - y - 3x + 1 = 0$ representa una parábola. Halla las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

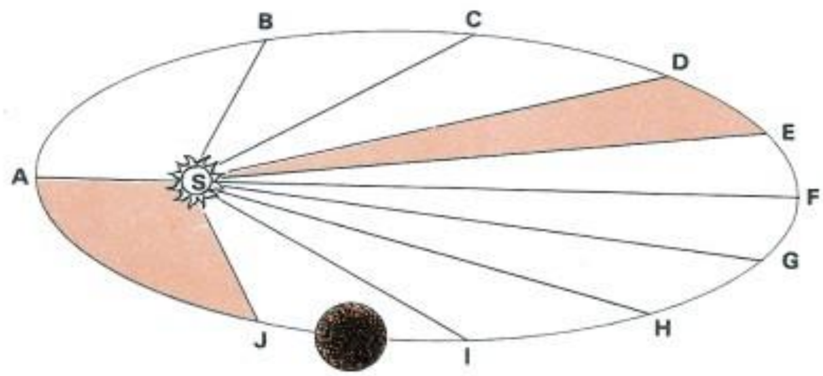
6. ¿Cuál es la ecuación de la directriz de una parábola que tiene por ecuación la siguiente: $x^2 - 16y = 2$?

3.3 Elipse

Introducción

¿Sabes cómo es la forma del camino o trayectoria que siguen los planetas alrededor del sol?

En siglo XVI llamado Johanes Kepler, astrónomo, matemático y físico alemán, lo descubrió. En la publicación, en 1609, de la *Astronomia nova* (Nueva astronomía), la obra que contenía las dos primeras leyes llamadas de Kepler, relativas a la elipticidad de las órbitas y a la igualdad de las áreas barridas, en tiempos iguales, por los radios vectores que unen los planetas con el Sol.



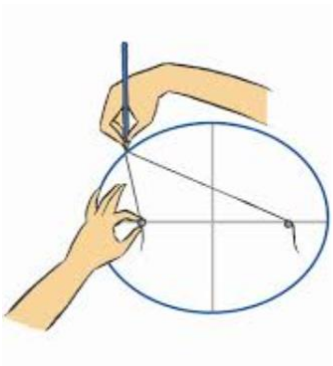
¿Cuándo se puede usar las leyes de Kepler?

Kepler dedujo estas tres leyes a partir de la observación del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Gracias a ellas podemos estudiar también:

- El movimiento de *cualquier* cuerpo que *orbite* alrededor del Sol:
  - planetas
  - asteroides
  - cometas
- Satélites orbitando alrededor de planetas
  - Naturales (por ejemplo, la Luna)
  - Artificiales

Actividades de Apertura

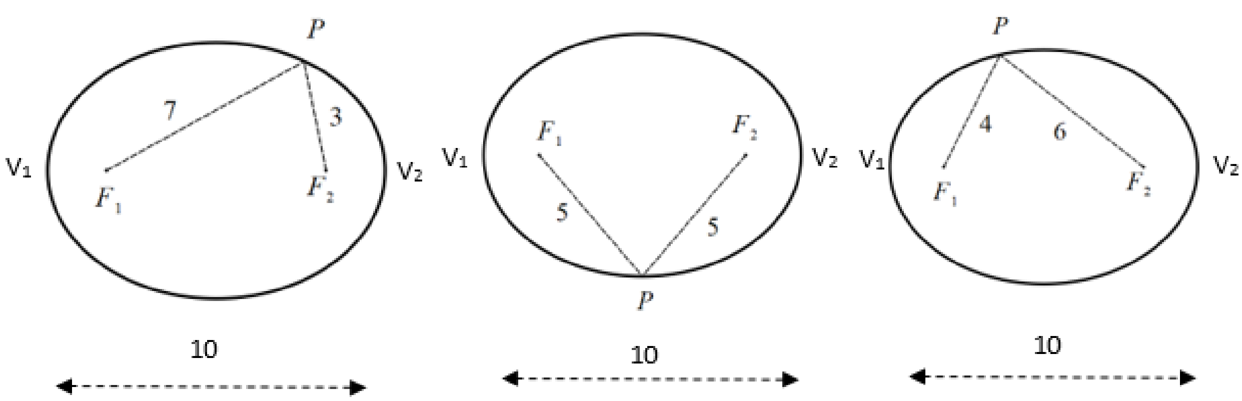
¿Qué es la elipse?



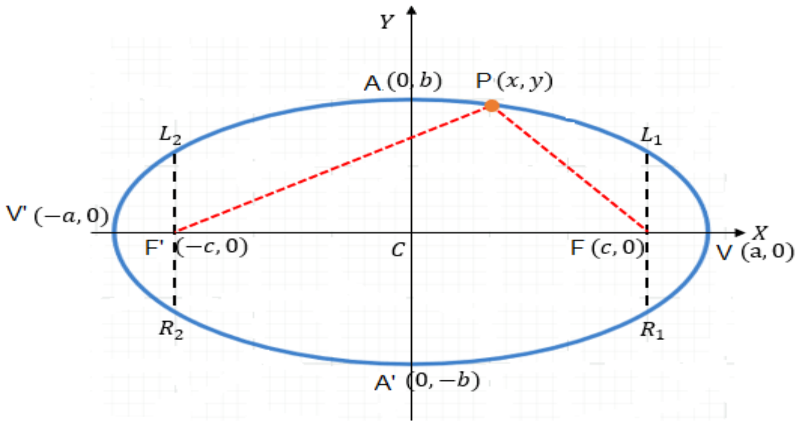
Existe una forma sencilla de trazar una elipse conocida como “método del jardinero” ¿Cómo lo hacen? clavan dos estacas en el suelo, atan entre ambas una cuerda suficientemente amplia y, manteniéndola tensa, trazan una línea sobre la tierra apoyando un palo sobre la cuerda y deslizándolo sobre la misma. Tu puedes seguir éste procedimiento de una manera sencilla con dos clavos y una cuerda. Realizando ésta pequeña actividad te facilitará determinar los principales elementos de la elipse que se estudian en Geometría Analítica.

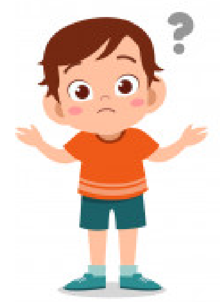
¿Cómo se define una elipse?

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante y es igual a la distancia entre los extremos de su eje mayor. Observa como en éste caso en particular ambas distancias suman 10.



$PF_1 + PF_2 = V_1V_2$	$PF_1 + PF_2 = V_1V_2$	$PF_1 + PF_2 = V_1V_2$





Elementos de la elipse:

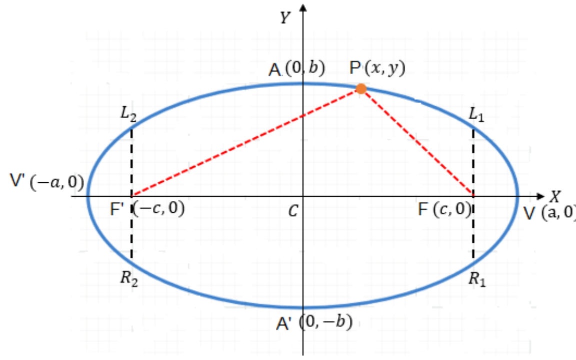
1. **Focos:** Son los puntos fijos **F** y **F'**.
2. **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos.
3. **Eje secundario:** Es la mediatriz del segmento **FF'**.
4. **Centro:** Es el punto **C** de intersección de los ejes.
5. **Radios vectores:** Son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: **PF** y **PF'**.
6. **Distancia focal:** Es el segmento de longitud $2c$, "c" es el valor de la semidistancia focal.
7. **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: V, V' vértices de eje mayor y A, A' vértices del eje menor.
8. **Eje mayor:** Es el segmento de longitud $2a$, "a" es el valor del semieje mayor.
9. **Eje menor:** Es el segmento de longitud $2b$, "b" es el valor del semieje menor.
10. **Lado recto**: Segmento de recta perpendicular al eje focal y que pasa por uno de sus focos y cuyos puntos extremos están sobre la elipse.
11. **Ejes de simetría:** Son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
12. **Centro de simetría:** Coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

La orientación de la elipse tomando en cuenta el eje mayor en el plano cartesiano.

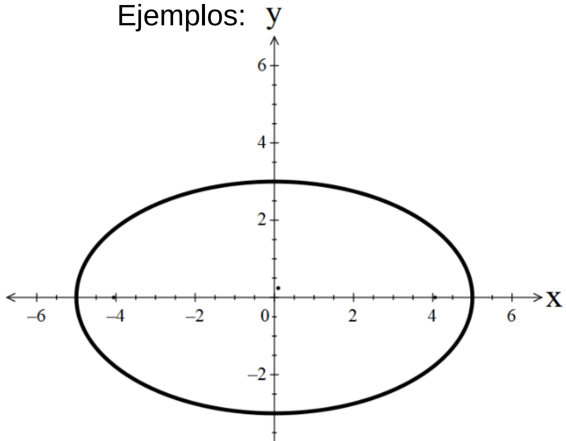
En una parábola horizontal el eje mayor coincide con el eje "X".

Ecuación de la elipse horizontal.

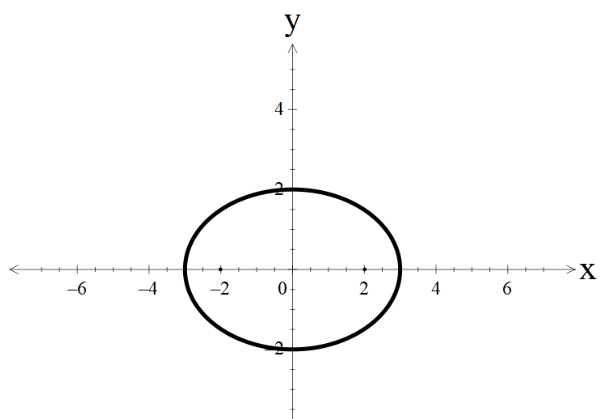
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



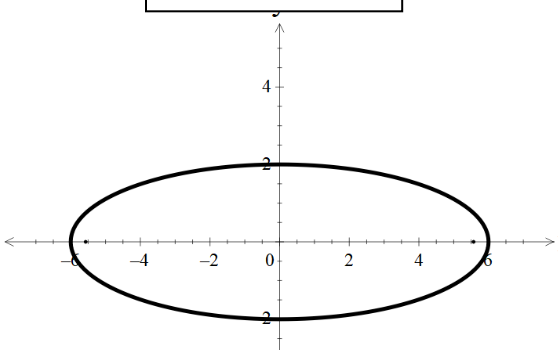
Ejemplos:



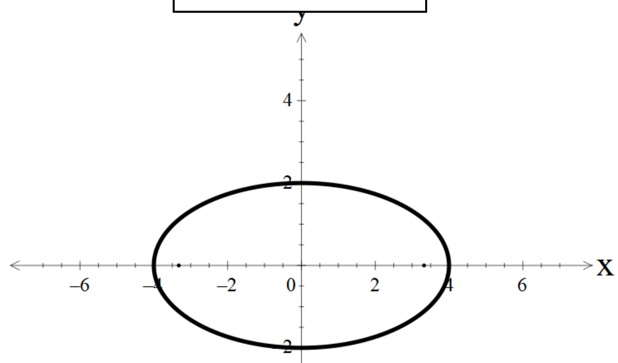
$$\boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$



$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}$$



$$\boxed{\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1}$$

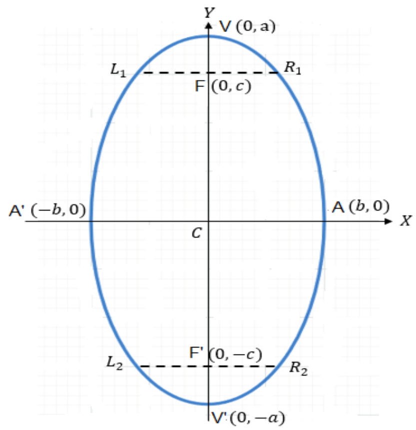


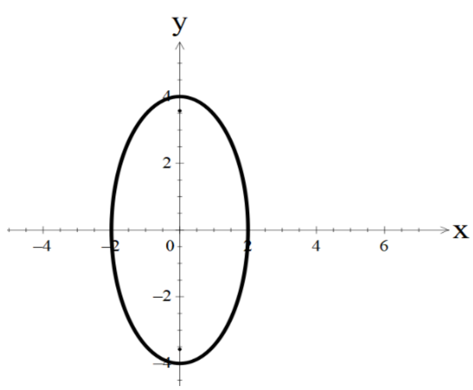
$$\boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1}$$

En una parábola vertical el eje mayor coincide con el eje "Y".

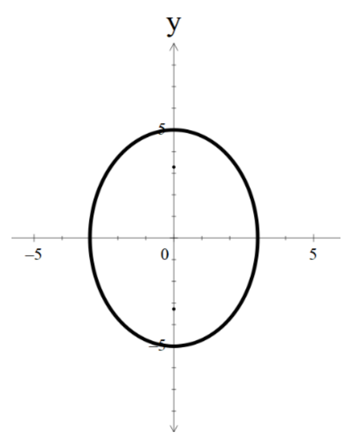
Ecuación de la elipse vertical.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

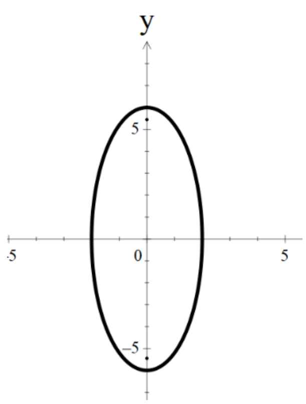




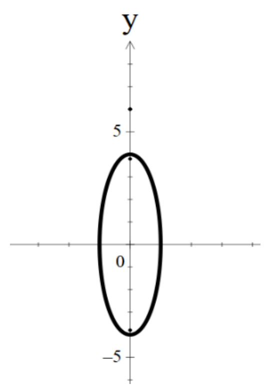
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$



$$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$$



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$$



$$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{1}=1$$

Definición y valor de la excentricidad.

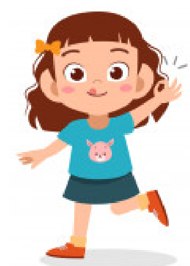
La excentricidad de una elipse (*e*) es un valor que determina la forma de la elipse. Sea "c" la semidistancia focal y "a" el semieje mayor:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}$$

La excentricidad puede tomar valores entre $\mathbf{0}\ y\ \mathbf{1}$. Es 0 cuando la elipse es una circunferencia. En este caso los semiejes mayor y menor son iguales y los focos $(F\ y\ F')$ coinciden en el centro de la elipse. Cuando la excentricidad crece y tiende a 1, la elipse se aproxima a un segmento.

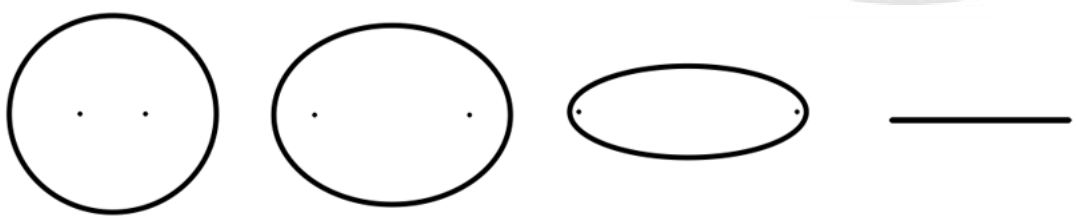
Existe otra fórmula que calcula la **excentricidad** a partir de los dos semiejes (*a* y *b*).

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$



Esta fórmula se obtiene a partir de la anterior ya que se cumple que:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$



$\boxed{e = 0}$ $\boxed{e = 0.5}$ $\boxed{e = 0.8}$ $\boxed{e = 1}$

Actividades de Desarrollo

Analiza los siguientes ejemplos en los que se muestra paso a paso la determinación de las ecuaciones y elementos de la Elipse

Como en las cónicas anteriores, calcula la ecuación general de la elipse, a partir de la ecuación en su forma ordinaria, expresarla en la siguiente forma:

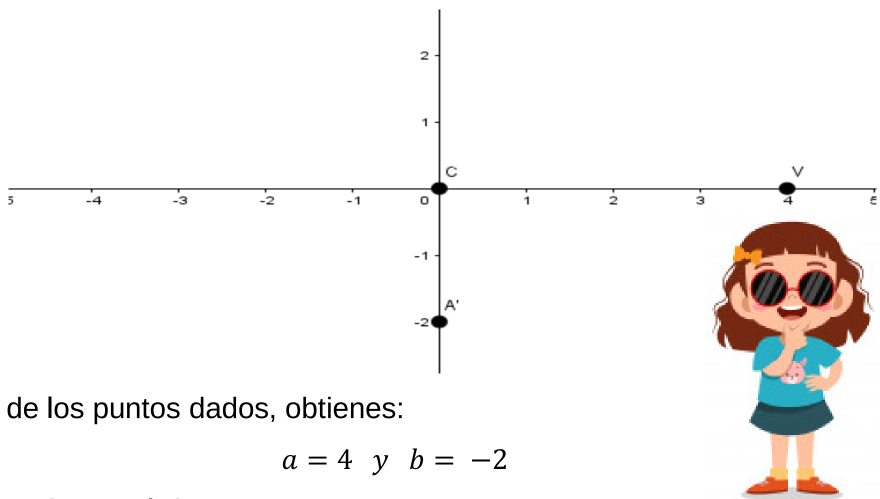
$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si la ecuación corresponde a una elipse, entonces los signos de A y B deben ser iguales.

Ecuación de la elipse con centro en el origen y cuyo eje focal esta sobre el eje de las "$\boldsymbol{x}$".

Ejemplo 1: Obtén la ecuación de la elipse con un vértice en $V(4, 0)$, un extremo del eje menor en $A'(0, -2)$ y centro en el origen $C(0, 0)$.

Plantea las condiciones iniciales del problema.



Por la posición de los puntos dados, obtienes:

$$a = 4 \quad y \quad b = -2$$

Las coordenadas de los vértices son:

Eje mayor:	Eje menor:
$V(4, 0)\ \ y\ \ V'(-4, 0)$	$A(4, 0)\ \ y\ A'(-4, 0)$

Desconoces las coordenadas de los focos, recuerda el apartado de la excentricidad, donde concluimos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Puedes encontrar las coordenadas de los focos, realiza un despeje:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Sustituye los valores:

$$c = \sqrt{(4)^2 - (2)^2}$$

$$c = \sqrt{16 - 4}$$

$$c = \sqrt{12}$$

Las coordenadas de los focos están en:

$$F\left(\sqrt{12}, 0\right) \;\; y \;\; F'\left(-\sqrt{12}, 0\right)$$

Como el centro y el eje focal se encuentran en el eje de las "x", su alineación de la elipse es horizontal, su ecuación estaría dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si sustituyes los valores, tendrás:

$$\frac{x^2}{(4)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1$$

Ecuación ordinaria

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{4x^2 + 16y^2}{64} = 1$$

$$4x^2 + 16y^2 = 1(64)$$

Ecuación en forma general:

$$4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

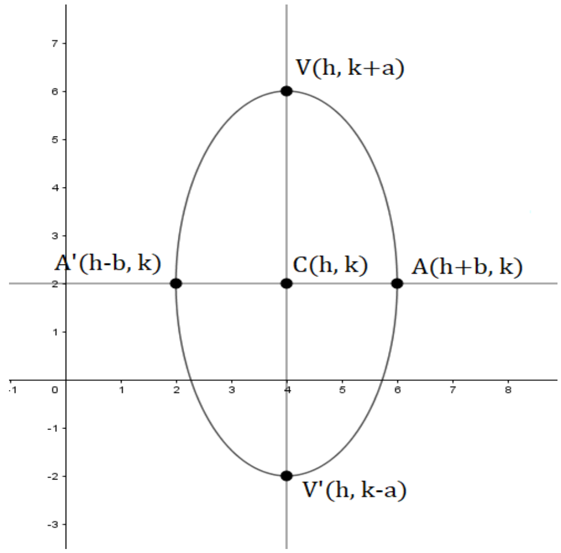
Algunos elementos más de la elipse:

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4}$	Longitud del lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

Longitud de los ejes mayor y menor:

$Eje\ mayor\ 2a, = 2(4) = 8$	$Eje\ menor\ 2b, = 2(2) = 4$

Ecuación de la elipse con centro fuera del origen y cuyo eje focal esta sobre el eje de las "y".



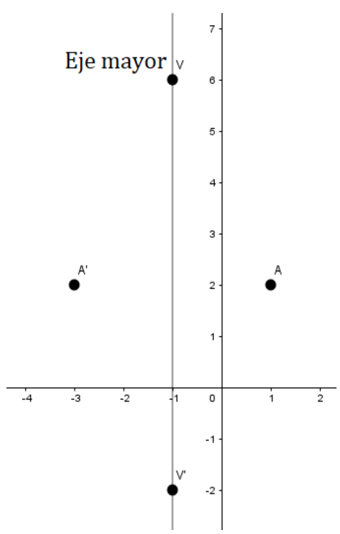
Ecuación de la elipse centro fuera del origen, eje mayor vertical.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ejemplo 2: Determina la ecuación de la elipse con vértices en el eje mayor $(-1,6)\ y\ (-1,-2)$ y vértices en el eje menor $(-3,2)\ y\ (1,2)$

Solución

Grafica las condiciones iniciales:



Debes tomar en cuenta que los vértices del eje mayor se encuentran alineados al eje "y", observa que la elipse está orientada en forma vertical.

Las coordenadas de los vértices del eje mayor:

$V(-1,6)\ y\ V'(-1,-2)$

Las coordenadas de los vértices del eje menor:

$A(1,2)\ y\ A'(-3,2)$

Para determinar las coordenadas del centro, es necesario que busques el punto medio del segmento que une los vértices del eje mayor.

$$C(h,k)=\left(\frac{-1+(-1)}{2},\frac{6+(-2)}{2}\right)$$

$$C(h,k) = (-1,2)$$

Las distancias del centro a los vértices y a los focos.

$a = 4,\qquad b = 2,\qquad c = ?$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}\qquad c = \sqrt{(4)^2 - (2)^2}\qquad c = \sqrt{12}$$

Las coordenadas de los focos:

$F\left(-1, 2 + \sqrt{12}\right)$ y $F'\left(-1, 2 - \sqrt{12}\right)$

Ecuación de la elipse:

$$\frac{\left(x - (-1)\right)^2}{(2)^2} + \frac{(y-2)^2}{(4)^2} = 1$$

Ecuación ordinaria de la elipse:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x^2 + 2x + 1)}{4} + \frac{(y^2 - 4y + 4)}{16} = 1$$

$$\frac{16(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4)}{64} = 1$$

$$\frac{16x^2 + 32x + 16 + 4y^2 - 16y + 16}{64} = 1$$

$$16x^2 + 32x + 16 + 4y^2 - 16y + 16 = 1(64)$$

$$16x^2 + 32x + 16 + 4y^2 - 16y + 16 - 64 = 0$$

Ecuación general de la elipse:

$$16x^2 + 4y^2 + 32x - 16y - 32 = 0$$

El valor de la excentricidad: $$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4}$$	Longitud del lado recto: $$LR = \frac{2(2)^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Ecuación general de la elipse. Determinación de sus elementos.

Ejemplo 3: La ecuación de la elipse es: $10x^2 + 7y^2 - 70 = 0$, determina sus elementos.

En la ecuación no existe los términos lineales de "x" ni de "y", concluyes que su centro es el origen, continuamos deja en el primer miembro los términos cuadráticos:

$$10x^2 + 7y^2 = 70$$

Divide entre la cantidad que está en el resultado de tal forma que sea igual a 1.

$$\frac{10x^2}{70}+\frac{7y^2}{70}=\frac{70}{70}$$

Ecuación ordinaria:

$$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{10}=1$$

El valor mayor del denominador está en la variable "y", por lo tanto, esta elipse es con centro en el origen y en forma vertical.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

Con ello puedes encontrar el valor de la distancia del centro al foco:

$$a=\sqrt{10}, \qquad b=\sqrt{7}, \qquad c=?$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad c=\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} \qquad c=\sqrt{3}$$

Los elementos de la elipse $10x^2+7y^2-70=0$; centro $C(0,0)$

Las coordenadas de los vértices del eje mayor: $V\left(0,\sqrt{10}\right)\ y\ \ V'\left(0,-\sqrt{10}\right)$	Del eje menor: $A\left(\sqrt{7},0\right)\ y\ \ A'\left(-\sqrt{7},0\right)$	De los focos; $F\left(0,\sqrt{3}\right)\ y\ \ F'\left(0,-\sqrt{3}\right)$

Excentricidad $e=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$	Longitud del lado recto $LR=\frac{2\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$

Ejemplo 4: La ecuación de una elipse es $9x^2+16y^2+36x-96y+36=0$, determina sus elementos.

Como tienes términos lineales para la variable "x" así como para "y" la elipse se encuentra fuera del origen:

Realiza la agrupación de las variables, primero la variable x, posteriormente y:

$$9x^2+36x+16y^2-96y=-36$$

Factoriza considerando las variables:

$$9(x^2+4x)+16(y^2-6y)=-36$$

Completa los trinomios cuadrados perfectos, siempre conservando la igualdad.

$$9(x^2+4x+4)+16(y^2-6y+9)=-36+36+144$$

$$9(x^2+4x+4)+16(y^2-6y+9)=144$$

$$\frac{9(x^2+4x+4)}{144}+\frac{16(y^2-6y+9)}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x^2+4x+4)}{16}+\frac{(y^2-6y+9)}{9}=1$$

Factoriza los trinomios cuadrados perfectos.

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$$

Ecuación ordinaria de la elipse, el denominador con mayor valor se encuentra debajo de la variable "x", esto determina que es una elipse de forma horizontal, cuya fórmula es;

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

En valor de las coordenadas del centro: $C(-2,3)$

También determina que las longitudes de los vértices y del foco:

$$a=4, \qquad b=\ 3, \qquad c=?$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad c=\sqrt{(4)^2-(3)^2} \qquad c=\sqrt{7}$$

Las coordenadas del vértice a partir el centro del eje mayor: $V(h+a,k)\ y\ \ V'(h-a,k)$ $V(2,3\,)\ y\ \ V'(-6,3)$	Del eje menor: $A(h,k+b)\ y\ \ A'(h,k-a)$ $A(-2,6)\ y\ \ A'(-2,0)$	De los focos: $F\left(-2+\sqrt{7},3\right)\ y\ \ F'\left(-2-\sqrt{7},3\right)$

Excentricidad $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$	Longitud del lado recto $LR=\frac{2(3)^2}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

Con base en el análisis que hiciste de los ejemplos anteriores, resuelve los siguientes ejercicios:

1. Una elipse con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto V(5,0) y uno de sus focos en el punto F(3,0). Determina lo siguiente:

a) Las coordenadas del vértice y el foco restantes
b) Las coordenadas de los extremos del eje menor
c) Su excentricidad
d) La longitud de sus lados rectos
e) La ecuación de la elipse

2. Una elipse tiene de ecuación:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

a) ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?
b) ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?
c) ¿Qué valor tiene su excentricidad?
d) ¿Cuánto miden sus lados rectos?

3. Una elipse tiene de ecuación:

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

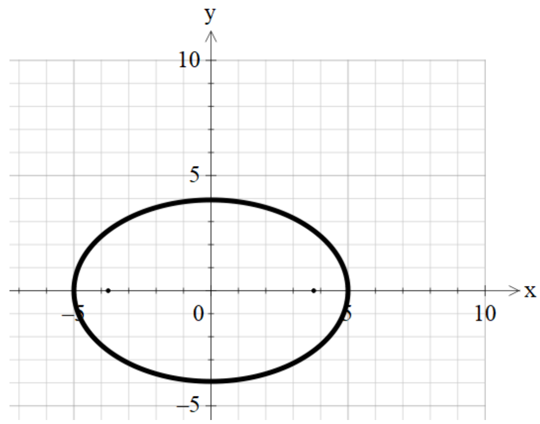
a) ¿Qué coordenadas tiene su centro?
b) ¿Cuáles son las coordenadas de sus vértices?
c) ¿Cuáles son las coordenadas de sus focos?
d) ¿Qué valor tiene su excentricidad?
e) ¿Cuánto miden sus lados rectos?

4. La ecuación general de una elipse es $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$

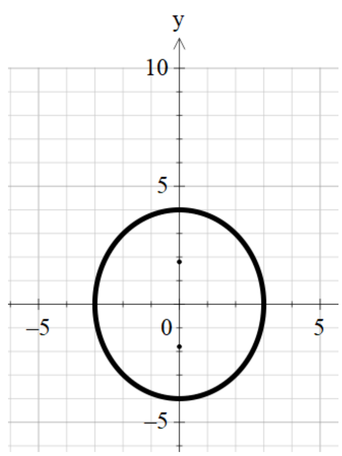
a) Conviértela a su forma reducida u ordinaria
b) Determina las coordenadas de su centro
c) Indica las coordenadas de sus vértices
d) Indica las coordenadas de sus vértices

5. Por simple inspección deduce las ecuaciones de las siguientes elipses:

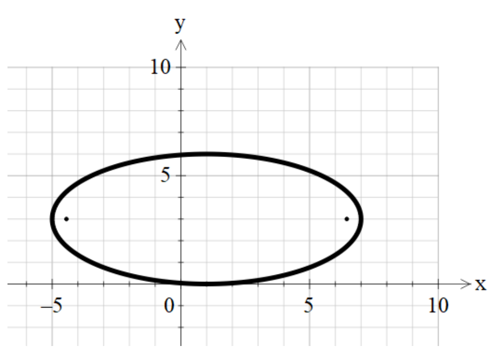
a) ________________



b) _______________



c) ________________



Actividades de Cierre

Retoma la primer Ley de Kepler y encuentra la ecuación de la trayectoria de la tierra en el movimiento de translación, resuelve el siguiente problema.

La orbita de la Tierra alrededor del Sol es de forma elíptica, con el sol en uno de los focos y un semieje mayor de longitud de 152.6 millones de kilómetros. Si la excentricidad de la elipse es $e = 0.0167$, determina:

a. La distancia mínima del sol a la tierra.
b. La mayor distancia posible del sol a la tierra.

Cuál es la ecuación de órbita elíptica.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Un arquitecto diseña un jardín de forma elíptica en un terreno rectangular cuyas medidas son; 6 metros de largo y 4 metros de ancho, el jardín debe abarcar todo el terreno. Si se desea colocar dos lámparas en los focos del jardín elíptico, a que distancia se colocaran del centro de la elipse.

2. Cruzando los Alpes Suizos:

El túnel de San Gotardo está ubicado en los Alpes Suizos, con una longitud de 57 kilómetros es el túnel ferroviario más largo del mundo.

La velocidad máxima de los trenes es de 250 kilómetros por hora, esto reduce considerablemente el tiempo de viaje, por ejemplo, el tiempo de viaje en auto entre Milán Italia y Zúrich Suiza es de cuatro horas, que quedan reducidas a tan solo ¡dos horas y treinta minutos!

El proyecto está formado por dos tubos de unos 10 metros de diámetro cada uno, cada vía está paralela al centro del tubo que la contiene, si sabemos que el centro exacto de cada tubo está ubicado en los focos de una enorme elipse y que, en un punto determinado, cuando las dos vías sobre las que pasan 260 veces los trenes al día, se encuentran paralelas entre sí hay una distancia de 15 metros de separación de una a la otra:

1) ¿Cuánto mide el eje menor de la elipse? ____

2) ¿Cuál es la ecuación de esta enorme elipse?_____________________________________

Ejercicios Adicionales

Encuentra la ecuación de la elipse con centro en el origen.

a. Uno de los vértices del eje mayor se encuentra en el punto $V(0,7)$ y la coordenada de uno de los focos $F(0,4)$, determinar la ecuación de la elipse.

b. La excentricidad de una elipse es $e = \frac{4}{9}$ y la coordenada de un foco es $F(4,0)$, encontrar la ecuación de la elipse.

Determina la ecuación de la elipse con centro fuera del origen.

c. Los vértices del eje mayor corresponden a; $V(7,2)$, $V'(-5,2)$ las coordenadas del eje menor son $A(1,5)$, $A'(1,-1)$, cuál es la ecuación de la elipse.

d. Una elipse tiene como centro el punto $C(-3,-4)$, con una excentricidad de $e = \frac{5}{7}$ y su eje focal es paralelo al eje de las "y".

Determina los elementos de una ecuación de la elipse.

e. La ecuación de la elipse es $4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$, encontrar las coordenadas de los vértices del eje mayor y la excentricidad.

f. Determinar las coordenadas del centro, la excentricidad y la longitud de los lados rectos, de la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 + 100x + 32y - 284 = 0$

Fuentes consultadas

Aguilar Márquez, A., Vázquez, I. B., Vlapai, F., Ruiz, I. G., & Aurelio, H. (2009). Matemáticas simplificadas (Segunda ed.). Estado de México, México: Pearson Educación.

Baldor, Aurelio, Geometría plana y del espacio y trigonometría, Publicación Cultural, México, 1983.

Basto, R. J. (2011). Geometría analítica (2.a ed.). Grupo Editorial Patria.

Bolaños, L. (2012). Geometría analítica. México: GAFRA.

COLEGIO NACIONAL DE MATEMATICAS, Geometría analítica, Primera edición: PEARSON EDUCACATION, México, 2009, ISBN: 978-607-442-349-5 Área: Matemáticas.

Garza Olvera, Benjamín. Geometría Analítica. México. Ed. Pearson.2014

Garza Olvera, Benjamín, Matemáticas III. Geometría analítica, fce (colección dgeti), México, 2002.

Grajales José, Julio César, Geometría Analítica, fce (colección dgeti), México, 2014

Jara, P. (2010). Hiperboloide. 10 septiembre de 2020, de Inventecrea Sitio web: https://pedro-jara.blogspot.com/2010/05/hiperboloide.html

Júnez Vega, Baltazar y otros, Matemáticas III. Geometría analítica, fce (colección dgeti), México, 2004.

Larson Ron, Falvo David C. (2018). Precálculo Introducción a las matemáticas universitarias. Primera edición. Ed. CENGAGE México.

Lehmann, Charles, Geometría analítica, Limusa, México, 1982.

Lehmann Charles H. (2010). Geometría Analítica. Ed Limusa, México. Publicación libre en internet: https://archive.org/details/GeometriaAnalitica.

Magaña, L., Salazar, P. (1994). Geometría analítica plana. México: Nueva Imagen.

Miguel Constantino, Construcciones geométricas de Geometría Analítica aplicando GeoGebra (apuntes CETis 132), México 2020.

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, Á., & Ramírez, A. (2015). Geometría Analítica Y Trigonometría (3.a ed.). Pearson Educación.

Pulido Chiunti, A., & Vélez Castillejos, M. A. (2011). Matemáticas 1 (Segunda ed.). Editorial Nueva Imagen.

Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade
Jefe de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet
Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia
Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes
Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Luis Manuel Guerra Franco
Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Miguel Constantino Hernández Pérez
Coordinador de la Mesa de trabajo de Geometría Analítica

MC Gerardo Valdés Bermudes
Edición de la obra

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama
Edición de la obra

Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de ésta obra

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
Raul Toledo Escobar	CBTIS 62	Baja California Sur
Ana María García Zúñiga	CETIS 2	CD. de México
Loan Alejandra Servín Rodríguez	CETIS 52	CD. de México
Brillante Zavala Centeno	UAC	Campeche
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Ángel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Jesús Eugenio Ruiz Flores	CBTIS 60	Guanajuato
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas